



Higher Math YEAR 2016

16 MINUTE SCHOOL





Dhaka BOARD

সেট ও ফাংশন

 $A = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ এবং } x^2 - (p+q)x + pq = 0; p,q \in \mathbb{R}\},$ $B = \{2,3\}$ এবং $C = \{3,4,5\}$

[ঢা. বো. '১৬]

- (ক) উপসেট ও পূরক সেট কী?
- (খ) দেখাও যে, $P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$
- (গ) প্রমাণ করো যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

উত্তর

(ক) উপসেট ও পূরক সেট কী?

উপসেটঃ- একটি সেটের প্রত্যেকটি উপাদান যদি অপর একটি সেটের উপাদানসমূহের অন্তর্গত হয়, তবে প্রথম সেটকে দ্বিতীয় সেটের উপসেট বলা হয়। যেমনঃ- $A=\{2,3\}, B=\{2,3,4,5\}$ এর উপসেট।

পূরক সেটঃ- যদি U সার্বিক সেট এবং A সেটটি U এর উপসেট হয়, তাহলে A সেটের বহির্ভূত কিন্তু U সেটের অন্তর্গত অন্য সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে A সেটের পূরক সেট বলে। A এর পূরক সেটকে A^c বা A' দারা প্রকাশ করা হয়।

গাণিতিকভাবে $A^c = U \setminus A = \{x : x \in U \text{ এবং } x \notin A\}$

(খ) দেখাও যে, $P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$

দেওয়া আছে, $B = \{2,3\}$ এবং $C = \{3,4,5\}$

$$B \cap C = \{2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{3\}$$

বামপক্ষ =
$$P(B \cap C) = \{\{3\}, \emptyset\}$$

আবার,
$$P(B) = \{\{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \emptyset\}$$

এবং
$$P(C) = \{ \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{3,5\}, \{3,4,5\}, \emptyset \}$$

ডানপক্ষ =
$$P(B) \cap P(C)$$

$$= \big\{\{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \emptyset\big\} \cap \big\{\{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{3,5\}, \{3,4,5\}, \emptyset\big\}$$

$$= \{ \{3\}, \emptyset \}$$

$$\therefore P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$$

(দেখানো হলো)

(গ) প্রমাণ করো যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

দেওয়া আছে.

$$A = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ এবং } x^2 - (p+q)x + pq = 0; p, q \in \mathbb{R}\}$$

এখন,
$$x^2 - (p+q)x + pq = 0$$

বা,
$$x^2 - px - qx + pq = 0$$

বা,
$$x(x-p)-q(x-p)=0$$

$$\therefore (x-p)(x-q)=0$$

হয়,
$$x-p=0$$

$$\therefore x = p$$

$$\therefore A = \{p,q\}$$

$$B \cup C = \{2,3\} \cup \{3,4,5\}$$
$$= \{2,3,4,5\}$$

অথবা, x-q=0

 $\therefore x = q$

উচ্চতর গণিত – ঢাকা বোর্ড – ২০১৬





$$\therefore$$
 বামপক্ষ = $A \times (B \cup C)$
= $\{p,q\} \times \{2,3,4,5\}$
= $\{(p,2),(p,3),(p,4),(p,5),(q,2),(q,3),(q,4),(q,5)\}$

আবার,
$$A \times B = \{p, q\} \times \{2,3\}$$

= $\{(p, 2), (p, 3), (q, 2), (q, 3)\}$

$$A \times C = \{p, q\} \times \{3, 4, 5\}$$
$$= \{(p, 3), (p, 4), (p, 5), (q, 3), (q, 4), (q, 5)\}$$

ডানপক্ষ =
$$(A \times B) \cup (A \times C)$$

= $\{(p,2), (p,3), (q,2), (q,3)\} \cup \{(p,3), (p,4), (p,5), (q,3), (q,4), (q,5)\}$

=
$$\{(p, 2), (p, 3), (p, 4), (p, 5), (q, 2), (q, 3), (q, 4), (q, 5)\}$$

$$\therefore A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

(প্রমাণিত)





বীজগাণিতিক রাশি

$$f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$$

$$g(a) = \frac{2a}{(a+1)(a^2+1)^2}$$
 দুটি বীজগাণিতীয় রাশি

[ঢাকা বোর্ড – ২০১৬]

- (5) f(-3) এর মান নির্ণয় কর।
- (খ) f(a) কে a-p এবং a-q দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $p\neq q$, তবে দেখাও যে, $p^2+q^2+pq+5p+5Q+6=0$
- (গ) g(a) কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

উত্তর $(ar{\sigma})\;f(-3)\;$ এর মান নির্ণয় কর।

এখানে,
$$f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$$

$$f(-3) = (-3)^3 + 5(-3)^2 + 6(-3) + 8$$

$$= -27 + 45 - 18 + 8$$
$$= 8$$

নির্ণেয় মান 8



(খ) f(a) কে a-p এবং a-q দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $p\neq q$, তবে দেখাও যে, $p^2+q^2+pq+5p+5Q+6=0$

দেওয়া আছে, $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$

f(a) কে a-p দারা ভাগ করলে ভাগশেষ,

$$f(p) = p^3 + 5p^2 + 6p + 8$$

এবং a-q দারা ভাগ করলে ভাগশেষ,

$$f(q) = q^3 + 5q^2 + 6q + 8$$

শর্তমতে, f(p) = f(q)

$$4$$
, $p^3 + 5p^2 + 6p + 8 = q^3 + 5q^2 + 6q + 8$

$$\overline{4}$$
, $p^3 - q^3 - 5p^2 + 5q^2 + 6p - 6q - 8 + 8 = 0$

$$4$$
, $p^3 - q^3 + 5(p^2 - q^2) + 6(p - q) = 0$

$$4, (p-q)(p^2+pq+q^2) + 5(p+q)(p-q) + 6(p-q) = 0$$

$$\therefore p^2 + q^2 + pq + 5p + 5Q + 6 = 0$$
 [$\because m \neq n$ তাই $(m - n) \neq 0$]

(দেখানো হলো)

(গ) g(a) কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

দেওয়া আছে,
$$g(a) = \frac{2a}{(a+1)(a^2+1)^2}$$

যা a এর সকল মানের জন্য সত্য।

(1) নং এর উভয়পক্ষকে $(a+1)(a^2+1)^2$ দ্বারা গূণ করে পাই,

$$2a = A(a^2 + 1)^2 + (Ba + C)(a + 1) + (Da + E)(a + 1) \dots \dots \dots (2)$$

(2) নং হতে a^4, a^3, a^2, a এর সহগ ও ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই,

(4) ও (6) নং হতে,
$$D + E = 2 \dots (8)$$

(3) ও (5)নং হতে,
$$A+C+D=0............(9)$$

বা,
$$D=1$$

$$\therefore E = 1$$

(4) ও (5)নং হতে,
$$2A + D = 0$$

বা,
$$2A + 1 = 0$$

বা,
$$2A = -1$$

বা,
$$A = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore B = \frac{1}{2}$$
 [(3) থেকে]

(4) নং হতে,
$$\frac{1}{2} + C = 0$$

বা,
$$C = -\frac{1}{2}$$

$$A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}, D = 1$$

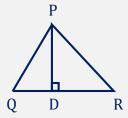
এবং E=1 এর মান (1) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{2a}{(a+1)(a^2+1)^2} = -\frac{1}{2(a+1)} + \frac{\frac{1}{2} \cdot a - \frac{1}{2}}{a^2+1} + \frac{a+1}{(a^2+1)^2}$$
$$= -\frac{1}{2(a+1)} + \frac{a-1}{2(a^2+1)} + \frac{a+1}{(a^2+1)^2}$$

[যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ]







 ΔPQR এর একটি $\angle R$ সূক্ষাকোণ এবং $PD \perp QR$.

[ঢাকা বোর্ড – ২০১৬]

- (ক) ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও ভরকেন্দ্র বলতে কি বোঝ?
- (খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + 2QR$. $DR = PR^2 + QR^2$.
- (গ) DR = 6 cm, PD = 4 cm হলে, DR ও PD কে একটি আয়তক্ষেত্রের যথাক্রমে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ ধরে ঐ আয়তক্ষেত্রকে DR বাহুর সাপেক্ষে একবার ঘোরালে উৎপন্ন ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

উত্তর

(ক) ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও ভরকেন্দ্র বলতে কি বোঝ?

ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র : ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর লম্ব সমদ্বিখন্ডক যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বলে।

ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র: ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র বলা হয়।





(খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + 2QR$. $DR = PR^2 + QR^2$.

বিশেষ নির্বচন : এখানে, ΔPQR এর $\angle R$ একটি সূক্ষাকোণ, $PD \perp QR$ এবং $\angle R$ এর বিপরীত বাহু PQ, অপর দুই বাহু যথাক্রমে QR ও PR।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + 2QR$. $DR = PR^2 + QR^2$.

প্রমাণ : ΔPQD এ $\angle PDQ$ = এক সমকোণ

$$\therefore PQ^2 = PD^2 + QD^2 \dots \dots (i)$$
 [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

আবার, ΔPDR এ $\angle PDR$ = এক সমকোণ

$$\therefore PR^2 = PD^2 + DR^2 \dots \dots \dots (ii)$$

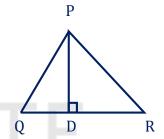
কিন্ত,,
$$QD = QR - DR$$

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই,

:
$$PQ^2 = PD^2 + (QR - DR)^2$$

 $= PD^2 + QR^2 + DR^2 - 2QR.DR$
 $= (PD^2 + DR^2) + QR^2 - 2QR.DR$
 $= PR^2 + QR^2 - 2QR.DR$ [(ii) নং হতে]

$$\therefore PQ^2 + 2QR. DR = PR^2 + QR^2.$$
 (প্রমাণিত)





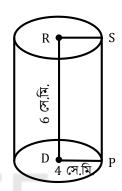


(গ) DR = 6 cm, PD = 4 cm হলে, DR ও PD কে একটি আয়তক্ষেত্রের যথাক্রমে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ ধরে ঐ আয়তক্ষেত্রকে DR বাহুর সাপেক্ষে একবার ঘোরালে উৎপন্ন ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, DR = 6 সে.মি.

PD = 4 সে.মি.

এখন, DR ও PD কে একটি আয়তক্ষেত্রের যথাক্রমে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ ধরে ঐ আয়তক্ষেত্রকে DR বাহুর সাপেক্ষে একবার ঘোরালে একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার উৎপন্ন হয় যার ব্যাসার্ধ, r=PD=4 সে.মি. এবং উচ্চতা, h=DR=6 সে.মি.।



আমরা জানি.

সিলিন্ডারের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(r+h)$ বর্গ একক

= 2 × 3.1416 × 4(4 + 6) বৰ্গ সে.মি.

= 251.33 বর্গ সে.মি. (প্রায়) (Ans)

এবং সিলিন্ডারের আয়তন $=\pi r^2 h$ ঘন একক

 $= 3.1416 \times 4^2 \times 6$ ঘন সে.মি.

= 301.59 ঘন সে.মি. (প্রায়) (Ans)





Rajshahi BOARD

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$$
 এবং $g(x) = \frac{x^2}{x^2-16}$ দুটি ফাংশন

[রাজশাহী বোর্ড – ২০১৬]

- (ক) f(x) দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।
- (খ) $f^{-1}(-1)$ নির্ণয় কর।
- (গ) g(x) কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

উত্তর

(ক) f(x) দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।

এখানে,
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$$

এখন,
$$f(x)$$
 এর মান বাস্তব হবে যখন, $\sqrt{3x-1}>0$

বা,
$$3x - 1 > 0$$

বা,
$$3x > 1$$

বা,
$$x > \frac{1}{3}$$

$$\therefore f(x)$$
 এর ডোমেন = $\{x \in \mathbb{R}: x > \frac{1}{3}\}$

(খ) $f^{-1}(-1)$ নির্ণয় কর।

এখানে,
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$$

বা,
$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$$

তাহলে,
$$f(x) = y$$

$$\therefore x = f^{-1}y$$

আবার,
$$y = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$$

বা,
$$y^2 = \frac{1}{3x-1}$$

বা,
$$3x - 1 = \frac{1}{y^2}$$

$$\exists 1, 3x = \frac{1}{v^2} + 1$$

বা,
$$3x = \frac{1+y^2}{y^2}$$

বা,
$$\chi = \frac{1+y^2}{3y^2}$$

বা,
$$f^{-1}(y) = \frac{1+y^2}{2y^2}$$

বা,
$$f^{-1}(y) = \frac{1+y^2}{3y^2}$$
 [: $f(x) = y : f^{-1}(y) = x$]

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{3x^2}$$

$$f^{-1}(-1) = \frac{1+(-1)^2}{3(-1)^2}$$
$$= \frac{1+1}{3\times 1}$$
$$= \frac{2}{3}$$

নির্ণেয় মান $\frac{2}{3}$





(গ) g(x) কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

এখানে,
$$g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16} = \frac{x^2}{(x+4)(x-4)}$$

ধরি,
$$\frac{x^2}{(x+4)(x-4)} = 1 + \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-4} \dots \dots \dots \dots (1)$$

(1) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে (x+4)(x-4) দ্বারা গূণ করে পাই,

$$x^2 = (x+4)(x-4) + A(x-4) + B(x+4) \dots \dots \dots (2)$$

(2) নং সমীকরণে x=4 বসিয়ে পাই,

$$4^2 = (4+4)(4-4) + A(4-4) + B(4+4)$$

বা. 8B = 16

বা,
$$B = \frac{16}{8}$$

$$\therefore B=2$$

আবার, (2) নং সমীকরণে x = -4 বসিয়ে পাই,

$$(-4)^2 = (-4+4)(-4-4) + A(-4-4) + B(-4+4)$$

বা,
$$-8A = 16$$

বা,
$$A = \frac{16}{-8} = -2$$

(1) নং সমীকরণে A ও B এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(x+4)(x-4)} = 1 + \frac{-2}{x+4} + \frac{2}{x-4}$$
$$= 1 - \frac{2}{x+4} + \frac{2}{x-4}$$

অতএব,
$$g(x) = 1 - \frac{2}{x+4} + \frac{2}{x-4}$$

[যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ]





Comilla BOARD

সেট ও ফাংশন

 $F(x) = \sqrt{2 - 4x}$ একটি ফাংশন।

[কু. বো. '১৬]

- (Φ) $F(\chi)$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় করো।
- (খ) F একটি এক-এক ফাংশন কি না নির্ধারণ করো।
- (গ) $F^{-1}(-3)$ এর মান নির্ণয় করো।

উত্তর

 (Φ) $F(\chi)$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে,

$$F(x) = \sqrt{2-4x}$$

 $F(x) \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $2-4x \geq 0$ হয়।

বা,
$$-4x \ge -2$$

বা,
$$4x \le 2$$

$$\therefore x \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore$$
 ডোমেন $F = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{1}{2} \right\}$ (Ans)

(খ) F একটি এক-এক ফাংশন কি না নির্ধারণ করো।

$$F(x) = \sqrt{2 - 4x}$$

ধরি,
$$x_1, x_2 \in$$
 ডোম F

ফাংশনটি এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি $F(x_1)=F(x_2)$ হলে $x_1=x_2$ হয়।

ধরি,
$$F(x_1) = F(x_2)$$

বা,
$$\sqrt{2-4x_1} = \sqrt{2-4x_2}$$

বা,
$$2-4x_1=2-4x_2$$

বা,
$$-4x_1 = -4x_2$$

$$\therefore x_1 = x_2$$
 [-4 দারা ভাগ করে]

F(x) একটি এক-এক ফাংশন। (Ans)

(গ) $F^{-1}(-3)$ এর মান নির্ণয় করো।

ধরি,
$$y = F(x) = \sqrt{2 - 4x}$$

বা,
$$y = \sqrt{2-4x}$$

বা,
$$y^2 = 2 - 4x$$

বা,
$$4x = 2 - y^2$$

বা,
$$x = \frac{2-y^2}{4}$$

$$\therefore F^{-1}(x) = \frac{2-x^2}{4}$$

$$F^{-1}(-3) = \frac{2 - (-3)^2}{4}$$
$$= \frac{2 - 9}{4} = \frac{-7}{4} \qquad (Ans)$$

উচ্চতর গণিত – কুমিল্লা বোর্ড – ২০১৬





Jessore BOARD

বীজগাণিতিক রাশি

 $P(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ এবং $Q(x) = x^2 - 2x - 8$.

[যশোর বোর্ড – ২০১৬]

- (Φ) Q(x) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
- (খ) $\frac{x^2}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।
- (গ) P(x) এর একটি উৎপাদক Q(x) হলে a এবং b এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর S

 (Φ) Q(x) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে,
$$Q(x) = x^2 - 2x - 8$$

$$= x^2 - 4x + 2x - 8$$

$$= x(x - 4) + 2(x - 4)$$

$$= (x - 4)(x + 2)$$

নির্ণেয় উৎপাদক (x-4)(x+2).



(খ) $\frac{x^2}{O(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

'ক' হতে প্রাপ্ত, Q(x) = (x-4)(x+2)

$$\therefore \frac{x^2}{Q(x)} = \frac{x^2}{(x-4)(x+2)}$$

ধরি,
$$\frac{x^2}{(x-4)(x+2)} = 1 + \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} \dots \dots \dots \dots (1)$$

(1) নং এর উভয়পক্ষকে (x-4)(x+2) দ্বারা গূণ করে পাই,

$$x^2 = (x-4)(x+2) + A(x+2) + B(x-4) \dots \dots \dots (2)$$

(2) নং এ x=-2 বসিয়ে পাই,

$$(-2)^2 = (-2-4)(-2+2) + A(-2+2) + B(-2-4)$$

বা,
$$-6B = 4$$

$$A = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

আবার, (2) নং এ x=4 বসিয়ে পাই,

$$(4)^2 = (4-4)(4+2) + A(4+2) + B(4-4)$$

বা,
$$16 = 0 + 6A + 0$$

বা,
$$6A = 16$$

বা,
$$A = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

(1) নং এ A ও B এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(x-4)(x+2)} = 1 + \frac{8}{x-4} - \frac{2}{x+2}$$

[যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ]





(গ) P(x) এর একটি উৎপাদক Q(x) হলে a এবং b এর মান নির্ণয় কর।

এখানে,
$$P(x) = x^3 - x^2 + ax + b$$

$$Q(x) = x^2 - 2x - 8$$

= $(x - 4)(x + 2)$ ['ক' হতে প্রাপ্ত]

এখানে, P(x) এর একটি উৎপাদক Q(x) বলে P(4)=0 এবং P(-2)=0 হবে,

$$P(4) = 4^3 - 4^2 + 4a + b$$
$$= 64 - 16 + 4a + b$$

$$= 4a + b + 48$$

এখন,
$$P(4) = 0$$
 হলে,

$$4a + b + 48 = 0 \dots \dots (1)$$

আবার,
$$P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + a(-2) + b$$

= $-8 - 4 - 2a + b = -2a + b - 12$

আবার,
$$P(-2) = 0$$
 হলে,

$$-2a + b - 12 = 0$$

$$7, -(2a - b + 12) = 0$$

$$\therefore 2a - b + 12 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

এখন, (1) ও (2) নং সমীকরণে, বজ্রগূণনের সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{a}{12+48} = \frac{b}{96-48} = \frac{1}{-4-2}$$

$$\overline{4}$$
, $\frac{a}{60} = \frac{b}{48} = \frac{1}{-6}$

হয়,
$$\frac{a}{60} = \frac{1}{-6}$$

বা,
$$-6a = 60$$

বা,
$$a = \frac{60}{-6}$$

$$\therefore a = -10$$

আবার,
$$\frac{b}{48} = \frac{1}{-6}$$

বা,
$$-6b = 48$$

বা,
$$b = \frac{48}{-6}$$

$$\therefore b = -8$$

 $\therefore a$ এবং b এর মান যথাক্রমে -10 ও -8.

উচ্চতর গণিত – যশোর বোর্ড – ২০১৬





Chittagong BOARD

বীজগাণিতিক রাশি

 $P(x)=x^3+x^2-6x$ এবং $f(x)=x^2-9x-6$. দুইটি ফাংশন। [চট্টগ্রাম বোর্ড – ২০১৬]

- (ক) f(x) কে (x+3) দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর।
- (খ) P(x) কে (x-a) এবং (x-b) দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$ তবে দেখাও যে, $a^2 + ab + b^2 + a + b = 6$.
- (গ) $\frac{f(x)}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

 (Φ) f(x) কে (x+3) দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর।

এখানে,
$$f(x) = x^2 - 9x - 6$$

f(x) কে (x+3) দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ হবে f(-3)

$$f(-3) = (-3)^2 - 9(-3) - 6$$
$$= 9 + 27 - 6$$
$$= 30$$

নির্ণেয় ভাগশেষ হবে 30

(খ) P(x) কে (x-a) এবং (x-b) দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$ তবে দেখাও যে, $a^2 + ab + b^2 + a + b = 6$.

দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + x^2 - 6x$

P(x) কে (x-a) দারা ভাগ করলে ভাগশেষ,

$$P(a) = a^3 + a^2 - 6a$$

এবং (x-b) দারা ভাগ করলে ভাগশেষ,

$$P(b) = b^3 + b^2 - 6b$$

শর্তমতে, P(a) = P(b)

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) + (a+b)(a-b) - 6(a-b) = 0$$

$$\exists (a-b)(a^2+ab+b^2)+(a+b)(a-b)-6(a-b)=0$$

$$\therefore a^2 + ab + b^2 + a + b = 6$$
 [$\because a \neq b$ তাই $(a - b) \neq 0$]
(দেখানো হলো)

(গ) $\frac{f(x)}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 9x - 6$

$$P(x) = x^{3} + x^{2} - 6x$$

$$= x(x^{2} + x - 6)$$

$$= x(x^{2} + 3x - 2x - 6)$$

$$= x\{x(x+3) - 2(x+3)\} = x(x+3)(x-2)$$

এখন,
$$\frac{f(x)}{P(x)} = \frac{x^2 - 9x - 6}{x(x+3)(x-2)}$$

উচ্চতর গণিত – চট্টগ্রাম বোর্ড – ২০১৬





মনে করি,
$$\frac{x^2-9x-6}{x(x+3)(x-2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} \dots \dots \dots \dots (1)$$

$$\boxed{1, \frac{x^2 - 9x - 6}{x(x+3)(x-2)} = \frac{A(x-2)(x+3) + B(x+3)x + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)}}$$

এখন, উভয়পক্ষকে x(x-2)(x+3) দ্বারা গূণ করে পাই,

$$x^{2} - 9x - 6 = A(x - 2)(x + 3) + B(x + 3)x + X(x - 2)x \dots \dots \dots (2)$$

এখন, x=0 সমীকরণ (2) এ বসিয়ে পাই,

$$0^2 - 9.0 - 6 = A(0-2)(0+3) + B(0+3).0 + C(0-2).0$$

বা,
$$-6A = -6$$

$$\therefore A = 1$$

আবার, x=2 বসিয়ে পাই,

$$2^{2} - 9.2 - 6 = A(2-2)(2+3) + B(2+3).2 + C(2-2).2$$

বা,
$$-20 = 10B$$

$$\therefore B = -2$$

আবার, x = -3 সমীকরণ (2) এ বসিয়ে পাই,

$$(-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 6 = A(-3-2)(-3+3) + B(-3+3) \cdot (-3) + C(-3-2) \cdot (-3)$$

বা,
$$15C = 30$$

$$\therefore C = 2$$

এখন, A,B,C এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 - 9x - 6}{x(x+3)(x-2)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+3}$$

[যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ]





3 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় AC ও BD.

[চট্টগ্রাম বোর্ড – ২০১৬]

- (ক) বৃত্তটির পরিধি নির্ণয় কর।
- (খ) প্রমাণ কর যে, AC.BD = AB.CD + BC.AD
- (গ) এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করতে হবে যার ভূমি বৃত্তের ব্যাসের সমান, অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান এবং শিরঃকোণ 30°. [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

MINUTE SCHOOL

(ক) বৃত্তটির পরিধি নির্ণয় কর।

বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r=3 সে.মি.

 \therefore বৃত্তের পরিধি $=2\pi r$ একক

= 2 × 3.1416 × 3 সে.মি.

= 18.8496 সে.মি.

বৃত্তের পরিধি 18.8496 সে.মি.।





(খ) প্রমাণ কর যে, AC.BD = AB.CD + BC.AD

দেওয়া আছে, বৃত্তে ABCD অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় AC ও BD.

প্রমাণ করতে হবে যে, AC.BD = AB.CD + BC.AD

আন্ধন: $\angle BAC$ কে $\angle DAC$ এর ছোট ধরে নিয়ে A বিন্দুতে AD রেখাংশের সাথে $\angle BAC$ এর সমান করে $\angle DAP$ অঙ্কন করি যেন AP রেখা BD কর্ণকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে $\angle BAC = \angle DAP$

উভয়পক্ষে ∠CAP যোগ করে পাই,

$$\angle BAC + \angle CAP = \angle DAP + \angle CAP$$

অর্থাৎ $\angle BAP = \angle CAD$ এখন, $\triangle ABP$ ও $\triangle ACD$ এর মধ্যে $\angle BAP =$

 $\angle CAD$

 $\angle ABD = \angle ACD$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle APB =$ অবশিষ্ট $\angle ADC$

 $: \Delta ABP$ ও ΔACD সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{BP}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

অর্থাৎ AC.BP = AB.CD (1)

আবার, ΔABC ও ΔAPD এর মধ্যে

 $\angle BAC = \angle PAD$ [অঙ্কন অনুসারে]

 $\angle ADP = \angle ACB$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle ABC =$ অবশিষ্ট $\angle APD$

 $: \Delta ABC$ ও ΔAPD সদৃশকোণী।

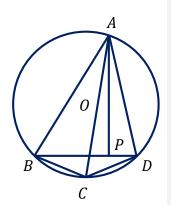
$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{PD}{BC}$$

অর্থাৎ AC.PD = BC.AD(2)

এখন, সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে পাই,

$$AC.BP + AC.PD = AB.CD + BC.AD$$

উচ্চতর গণিত – চট্টগ্রাম বোর্ড – ২০১৬







বা, AC(BP + PD) = AB.CD + BC.ADঅর্থাৎ, AC.BD = AB.CD + BC.AD [: BP + PD = BD]
(প্রমাণিত)

(গ) এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করতে হবে যার ভূমি বৃত্তের ব্যাসের সমান, অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর ব্রের ব্যাসার্ধের সমান এবং শিরঃকোণ 30°. [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

এখানে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 3 সে.মি.

 \therefore বৃত্তের ব্যাস = (3×2) সে.মি. = 6 সে.মি.

অর্থাৎ, একটি ত্রিভুজের ভূমি a=6 সে.মি., অপর দুই বাহুর অন্তর d=3 সে.মি. এবং শিরঃকোণ $\angle x=30^\circ$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ :

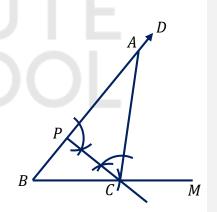
ধাপ ১. যেকোনো রশ্মি BD থেকে BP=d অংশ কেটে নিই।

ধাপ ২. P বিন্দুতে $\angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের সমান $\angle DPM$ ওঙ্কন করি।

ধাপ ৩. B কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বুত্তচাপ PM রেখাকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ 8. B ও C যোগ করি।

ধাপ ${\bf c}$: আবার ${\it C}$ বিন্দুতে $\angle DPC = \angle PCA$ কোণ অঙ্কন করি যেন ${\it CA}$ রেখাংশ ${\it BD}$ কে ${\it A}$ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ΔABC -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।







Dinajpur BOARD

n একটি বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা হলে, n=2x-1 যেখানে, $x\epsilon \mathbb{N}$

[দি. বো. '১৬]

- (ক) স্বাভাবিক সংখ্যা কী?
- (খ) দেখাও যে, প্রদত্ত সংখ্যার বর্গ একটি বিজোড় সংখ্যা।
- (গ) দেখাও যে, প্রদত্ত সংখ্যার বর্গকে ৪ দ্বারা ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে ভাগশেষ 1 হবে।

(ক) স্বাভাবিক সংখ্যা কী?

যে সংখ্যাগুলো গণনার কাজে ব্যবহৃত হয়, তাদের স্বাভাবিক সংখ্যা বলে। 1,2,3,4... ইত্যাদি স্বাভাবিক সংখ্যা বা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে $\mathbb N$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ, $\mathbb N=\{1,2,3,4...\}$

উচ্চতর গণিত – দিনাজপুর বোর্ড – ২০১৬





(খ) দেখাও যে, প্রদত্ত সংখ্যার বর্গ একটি বিজোড় সংখ্যা।

দেওয়া আছে,

n একটি বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার, n=2x-1 যেখানে, $x \in \mathbb{N}$

এখন
$$(2x-1)$$
 এর বর্গ = $(2x-1)^2$
= $(2x)^2 - 2.2x \cdot 1 + (1)^2$
= $4x^2 - 4x + 1$
= $4x(x-1) + 1$

যেহেতু $x \in \mathbb{N}$ সেহেতু 4x(x-1) একটি জোড় সংখ্যা। এর সাথে 1 যোগ করলে যোগফল অবশ্যই বিজোড় হবে।

- $\therefore 4x(x-1)+1$ সংখ্যাটি বিজোড়।
- $\therefore 2x-1$ এর বর্গ একটি বিজোড় সংখ্যা। যেখানে, $x \in \mathbb{N}$

(গ) দেখাও যে প্রদত্ত সংখ্যার বর্গকে 8 দ্বারা ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে ভাগশেষ 1 হবে।

'খ' হতে পাই,

$$(2x-1)^2 = 4x(x-1) + 1$$

এখানে, x এবং (x-1) দুটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা। সুতরাং এদের যেকোনো একটি অবশ্যই জোড় সংখ্যা হবে। ফলে এদের গুণফলও জোড় সংখ্যা হবে।

 $\therefore x(x-1)$, 2 দ্বারা বিভাজ্য।

 $∴ 4x(x-1), 4 \times 2 = 8$ দ্বারা বিভাজ্য।

সুতরাং, 4x(x-1)+1 কে 8 দ্বারা ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে ভাগশেষ 1 থাকবে।

(2x-1) বর্গকে 8 দ্বারা ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে ভাগশেষ 1 হবে। [দেখানো হলো]





Sylhet BOARD

বীজগাণিতিক রাশি

 $g(x)=px^3+qx^2+rx+s$ বহুপদীর সহগগুলো পূর্ণসংখ্যা $p\neq 0, s\neq 0$ এবং x-1 বহুপদীটির

একটি উৎপাদক। অপর একটি রাশি $Q(x)=rac{x^3}{x^2-16}$

[সিলেট বোর্ড – ২০১৬]

- (ক) দেখাও যে, p + q + r + s = 0.
- (খ) যদি p=1, q=5, r=6, s=8 হয় এবং g(x) কে x-k ও x-l দ্বারা ভাগ করলে একই অবশিষ্ট থাকে, যেখানে, $k\neq l$ তবে দেখাও যে, $k^2+l^2+kl+5k+5l+6=0$.
- (গ) Q(x) কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

উত্তর

(ক) দেখোও যে, p + q + r + s = 0

এখানে,
$$g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$$

এখন, g(x) বহুপদীর একটি উৎপাদক x-1 হলে, g(1)=0 হবে

$$g(1) = p(1)^3 + q(1)^2 + r \cdot (1) + s$$
$$= p + q + r + s$$

আবার,
$$g(1) = 0$$

$$\therefore p + q + r + s = 0$$

[দেখানো হলো]





খে) যদি p=1, q=5, r=6, s=8 হয় এবং g(x) কে x-k ও x-l দ্বারা ভাগ করলে একই অবশিষ্ট থাকে,যেখানে, $k\neq l$ তবে দেখাও যে, $k^2+l^2+kl+5k+5l+6=0$.

এখানে,
$$g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$$

এখন,
$$p = 1$$
, $q = 5$, $r = 6$, $s = 8$ বসিয়ে পাই,

$$g(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$$

এখানে,
$$g(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$$

g(x) কে x-k দারা ভাগ করলে ভাগশেষ,

$$g(k) = k^3 + 5k^2 + 6k + 8$$

এবং x-l দারা ভাগ করলে ভাগশেষ,

$$a(l) = l^3 + 5l^2 + 6l + 8$$

শর্তমতে, g(k) = g(l)

$$4$$
, $k^3 - l^3 + 5(k^2 - l^2) + 6(k - l) = 0$

$$4l, (k-l)(k^2+kl+l^2)+5(k+l)(k-l)+6(k-l)=0$$

বা,
$$(k-l)(k^2+l^2+kl+5k+5l+6)=0$$

$$\therefore k^2 + l^2 + kl + 5k + 5l + 6 = 0$$
 [$\because k \neq l$ তাই $(k - l) \neq 0$]

(দেখানো হলো)





(গ) Q(x) কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

এখানে,
$$Q(x) = \frac{x^3}{x^2-16}$$

ধরি,
$$\frac{x^3}{x^2-16} = x + \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-4} \dots \dots \dots \dots (1)$$

(1) নং এর উভয়পক্ষকে (x+4)(x-4) দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^3 = (x+4)(x-4) + A(x-4) + B(x+4) \dots \dots \dots \dots (2)$$

(2) নং এর উভয়পক্ষে x = 4 বসিয়ে পাই,

$$(4)^3 = (4+4)(4-4) + A(4-4) + B(4+4)$$

বা,
$$64 = 0 + 0 + 8B$$

বা,
$$B = \frac{64}{8} = 8$$

আবার (2) নং এর উভয়পক্ষে x = -4 বসিয়ে পাই,

উভয়পক্ষে
$$x = -4$$
 বসিয়ে পাই,
$$(-4)^3 = (-4+4)(-4-4) + A(-4-4) + B(-4+4)$$

$$\boxed{4}, -64 = 0 - 8A + 0$$

বা,
$$A = \frac{-64}{-8} = 8$$

এখন A ও B এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^3}{x^2 - 16} = x + \frac{8}{x + 4} + \frac{8}{x - 4}$$

[যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ]





স্থানাংক জ্যামিতি

5 ঢালবিশিষ্ট একটি রেখা A(2,-5) বিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুগামী অন্য একটি রেখা x অক্ষকে C(-1,0) বিন্দুতে ছেদ করে। B বিন্দুতে ছেদ করে।

- (ক) A বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
- (খ) AB রেখার সমীকরণ এবং দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
- (গ) ছক কাগজে স্থাপনপূর্বক $\triangle ABC$ এর শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উত্তর

(ক) A বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

A(2,-5) বিন্দুগামী ও 5 ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ,

$$y - (-5) = 5(x - 2)$$

বা,
$$y + 5 = 5x - 10$$

বা,
$$5x - y - 10 - 5 = 0$$

$$5x - y - 15 = 0$$
 (Ans)



(খ) AB রেখার সমীকরণ এবং দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

'ক' হতে পাই, A বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$$5x - y - 15 = 0$$

যেহেতু রেখাটি χ -অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে,

সেহেতু, B বিন্দুর কোটি, y=0

সুতরাং, 5x - 0 - 15 = 0

বা, 5x = 15

বা,
$$x = \frac{15}{5}$$

$$\therefore x = 3$$

∴ B বিন্দুর স্থানায় (3,0)

এখন, A ও B বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$$\frac{x-2}{2-3} = \frac{y-(-5)}{-5-0}$$

বা,
$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+5}{-5}$$

$$71, -5x + 10 = -y - 5$$

$$41, -5x + 10 + y + 5 = 0$$

বা,
$$5x - 10 - y - 5 = 0$$

$$5x - y - 15 = 0$$
 (Ans)

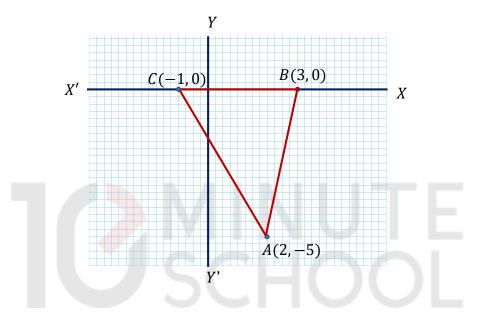
আবার,
$$AB$$
 রেখার দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(3-2)^2+\{0-(-5)\}^2}$ একক $=\sqrt{1+25}$ একক $=\sqrt{26}$ একক (Ans)





(গ) ছক কাগজে স্থাপনপূর্বক ΔABC এর শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

A(2,-5), B(3,0) এবং C(-1,0) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং পরস্পর বিন্দুগুলো যোগ করি।



এখন, A, B ও C বিন্দুত্রয় ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে নিয়ে

$$\Delta ABC$$
 এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2&3&-1&2\\-5&0&0&-5\end{vmatrix}$ $=\frac{1}{2}\{(2\times0)+(3\times0)+(-1)\times(-5)-(-5)\times3-0\times(-1)-0\times2\}$ $=\frac{1}{2}(5+15)$ $=\frac{1}{2}\times20$ $=10$ বর্গ একক (Ans)



Barisal BOARD

 $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$ একটি ফাংশন; যেখানে $x \neq 1$

[বরিশাল বোর্ড - ২০১৬]

- (ক) f(p) = k হলে, p এর মান নির্ণয় কর।
- (খ) $f^{-1}(3)$ নির্ণয় কর।
- (গ) $f(x^2)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

(ক) f(p)=k হলে, p এর মান নির্ণয় কর।

এখানে,
$$f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$$
 এবং $f(p) = \frac{2p+2}{p-1}$

$$f(p) = k$$

$$\therefore \frac{2p+2}{p-1} = k$$

বা,
$$2p + 2 = k(p - 1)$$

বা,
$$2p + 2 = kp - k$$

বা,
$$2p - kp = -k - 2$$

বা,
$$p(2-k) = -k-2$$

$$\therefore p$$
 এর মান $rac{k+2}{k-2}$

উচ্চতর গণিত – বরিশাল বোর্ড – ২০১৬



(খ) $f^{-1}(3)$ নির্ণয় কর।

এখানে,
$$f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$$

তাহলে,
$$f(x) = y$$

$$\therefore x = f^{-1}y$$

আবার,
$$y = \frac{2x+2}{x-1}$$

বা,
$$xy - y = 2x + 2$$

বা,
$$xy - 2x = y + 2$$

বা,
$$x(y-2) = y+2$$

বা,
$$x = \frac{y+2}{y-2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2}$$

$$f^{-1}(3) = \frac{3+2}{3-2}$$

$$= \frac{5}{1}$$

$$= 5$$

নির্ণেয় মান 5





(গ) $f(x^2)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

$$f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$$
$$f(x^2) = \frac{2x^2+2}{x^2-1}$$
$$= \frac{2x^2+2}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{2(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$$

মনে করি,
$$\frac{2(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} \equiv 2 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \dots \dots \dots \dots (1)$$

(1) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে (x+1)(x-1) দ্বারা গূণ করে পাই,

$$2x^2 + 2 = 2(x+1)(x-1) + A(x-1) + B(x+1) \dots \dots \dots (2)$$

এখন, x = -1 সমীকরণ (2) এ বসিয়ে পাই,

$$2(-1)^2 + 2 = 2(-1+1)(-1-1) + A(-1-1) + B(-1+1)$$

বা,
$$-2A = 4$$

বা,
$$A = \frac{4}{-2} = -2$$

আবার, x = 1 সমীকরণ (2) এ বসিয়ে পাই,

$$2(1)^2+2 = 2(1+1)(1-1) + A(1-1) + B(1+1)$$

$$\sqrt{1}$$
, $2 + 2 = 0 + 0 + 2B$

বা,
$$2B = 4$$

বা,
$$A = \frac{4}{2} = 2$$

এখন, $A \otimes B$ এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{2(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} = 2 - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1}$$

[যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ]