Higher Math

YEAR 2018

$F(x) = \sqrt{1-2x}$ এবং $Q(x) = \frac{x^2}{x^2-16}$ [সকল বোর্ড – ২০১৮]

(ক) $F(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।

(খ) $F^{-1}(x)$ এক-এক ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর।

(গ) $Q(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

উত্তর

(ক) $F(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।

$F(x) = \sqrt{1-2x} \in \mathbb{R}$ হবে যদি $1 - 2x \geq 0$

বা,$1 \geq 2x$

বা,$x \leq \frac{1}{2}$ হয়

$\therefore$ **ডোম** $\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \boldsymbol{x} \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\}$

(খ) $F^{-1}(x)$ এক-এক ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর।

$F(x) = \sqrt{1-2x}$

ধরি, $y = F(x) = \sqrt{1-2x}$

অর্থাৎ, $F(x) = y$

বা, $F^{-1}F(x) = F^{-1}(y)$

$\therefore x = F^{-1}(y)$

আবার, $y = \sqrt{1-2x}$

বা, $y^2 = 1-2x$ [বর্গ করে]

বা, $2x = 1-y^2$

বা, $x = \frac{1-y^2}{2}$

বা, $F^{-1}(y) = \frac{1-y^2}{2}$

$\therefore F^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{2}$

$F(x) = \sqrt{1-2x}$ হলে রেঞ্জ $F = R_+$

$\therefore$ ডোম $F^{-1} = R_+$ [$\because F(x)$ এর রেঞ্জ $= F^{-1}(x)$ এর ডোমেন]

যেকোনো $x_1 \in$ ডোম F^{-1} এবং $x_2 \in$ ডোম F^{-1} এর জন্য $F^{-1}(x)$ এক-এক ফাংশন হবে যদি $F^{-1}(x_1) = F^{-1}(x_2)$ হলে

$x_1 = x_2$ হয়।

$F^{-1}(x_1) = F^{-1}(x_2)$

বা, $\frac{1-x_1^2}{2} = \frac{1-x_2^2}{2}$

বা, $1-x_1^2 = 1-x_2^2$

বা, $x_1^2 = x_2^2$

$\therefore x_1 = \pm x_2$

$\therefore$ **$F^{-1}(x)$ এক-এক ফাংশন নয়।**

(গ) $Q(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

দেওয়া আছে, $Q(x) = \frac{x^2}{x^2-16}$

$= \frac{x^2}{(x+4)(x-4)}$

ধরি, $\frac{x^2}{(x+4)(x-4)} \equiv 1 + \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-4}$

বা, $x^2 \equiv (x+4)(x-4) + A(x-4) + B(x+4) \ldots \ldots \ldots (1)$

এটি একটি অভেদ যা x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সত্য।

(1) নং এ $x = -4$ বসালে, $16 = 0 + A(-4-4) + 0$

বা, $A = -2$

আবার $x = 4$ বসালে, $16 = 0 + 0 + B(4+4)$

বা, $A = 2$

$\therefore \frac{x^2}{(x+4)(x-4)} \equiv 1 - \frac{2}{x+4} + \frac{2}{x-4}$

[আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত হলো]

জ্যামিতি

ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু যথাক্রমে S, G ও O। [সকল বোর্ড '১৮]

(ক) চিত্রসহ বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপের সংজ্ঞা দাও।

(খ) প্রমাণ করো যে, S, G ও O বিন্দু তিনটি সমরেখ।

(গ) উদ্দীপকের ত্রিভুজটির মধ্যমা তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে AD, BE ও CF হলে প্রমাণ করো যে, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

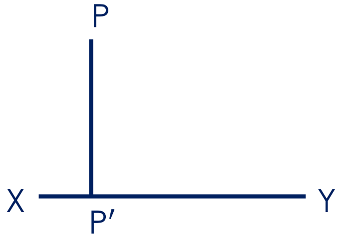
উত্তর

(ক) চিত্রসহ বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপের সংজ্ঞা দাও।

বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ (Orthogonal Projection of a Point):

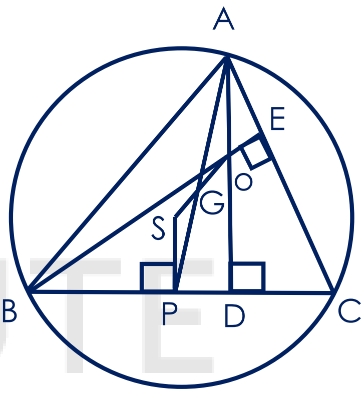
কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর কোন বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে সেই বিন্দু থেকে উক্ত নির্দিষ্ট রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুকে বুঝায়।

মনে করি, XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং P যেকোনো বিন্দু (নিচের চিত্রে)। P বিন্দু থেকে XY রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব PP' এবং এই লম্বের পাদবিন্দু P'। সুতরাং, P' বিন্দু XY রেখার উপর P বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ। কোন নির্দিষ্ট রেখার উপর কোন বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ একটি বিন্দু।



(খ) প্রমাণ করো যে, S, G ও O বিন্দু তিনটি সমরেখ।

বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ΔABC এর লম্ব বিন্দু O, পরিকেন্দ্র S এবং AP একটি মধ্যমা। লম্ববিন্দু O এবং পরিকেন্দ্র S এর সংযোগ রেখা AP মধ্যমাকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে। S, P যোগ করলে SP রেখা BC এর উপর লম্ব। তাহলে, G বিন্দুটি ΔABC এর ভরকেন্দ্র এটি প্রমাণ করাই যথেষ্ট।



প্রমাণঃ ΔABC এর লম্ববিন্দু O থেকে A শীর্ষের দূরত্ব OA এবং পরিকেন্দ্র S থেকে A শীর্ষের বিপরীত বাহু BC এর দূরত্ব SP।

$\therefore OA = 2SP \ldots .(1)$

এখন যেহেতু AD ও SP উভয়ই BC এর উপর লম্ব সেহেতু $AD \parallel SP$। এখন $AD \parallel SP$ এবং AP এদের ছেদক । সুতরাং একান্তর কোণ হওয়ায় $\angle PAD = \angle APS$ অর্থাৎ, $\angle OAG = \angle SPG$।

এখন, ΔAGO এবং ΔPGS এর মধ্যে

$\angle AGO = \angle PGS$ **[বিপ্রতীপ কোণ]**

$\angle OAG = \angle SPG$ **[একান্তর কোণ]**

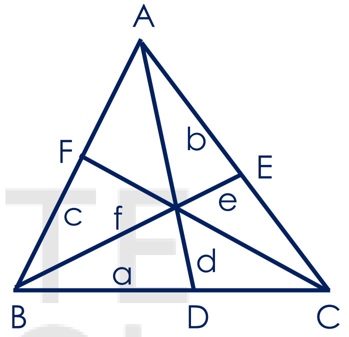
$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle AOG =$ অবশিষ্ট $\angle PSG$

$\therefore \Delta AGO$ এবং ΔPGS সদৃশকোণী।

সুতরাং, $\frac{AG}{GP} = \frac{OA}{SP}$ অর্থাৎ $\frac{AG}{GP} = \frac{2SP}{SP}$ **[(1) নং হতে]**

অতএব, $\frac{AG}{GP} = \frac{2}{1}$ বা, $AG : GP = 2 : 1$

(গ) উদ্দীপকের ত্রিভুজটির মধ্যমা তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে AD, BE ও CF হলে প্রমাণ করো যে, $3(AB^2 +$



ত্রিকোণমিতি

$P = tan\theta + sec\theta$ এবং $Q = \cot^2\theta + cosec^2\theta$ [সকল বোর্ড ১৮]

(ক) $sec\theta - tan\theta$ এর মান নির্ণয় করো।

(খ) দেখাও যে, $cos\theta = \frac{2P}{P^2+1}$

(গ) $Q = 3$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণটি সমাধান করো। যখন, $0 < \theta < 2\pi$.

উত্তর

(ক) $sec\theta - tan\theta$ এর মান নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে,

$$tan\theta + sec\theta = P$$

আমরা জানি,

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

বা, $(sec\theta + tan\theta)(sec\theta - \tan\theta) = 1$

বা, $P(sec\theta - tan\theta) = 1$

$\therefore \boldsymbol{sec\theta - tan\theta = \frac{1}{P}}$

(খ) দেখাও যে, $cos\theta = \frac{2P}{P^2+1}$

দেওয়া আছে, $tan\theta + sec\theta = P$

বা, $(\tan\theta \ + sec\theta)^2 = \mathrm{P}^2$ [বর্গ করে]

বা, $\left(\frac{sin\theta}{cos\theta} + \frac{1}{cos\theta}\right)^2 = P^2$

বা, $\left(\frac{sin\theta+1}{cos\theta}\right)^2 = P^2$

বা, $\frac{(sin\theta+1)^2}{\cos^2\theta} = P^2$

বা, $\frac{(sin\theta+1)^2}{1-\sin^2\theta} = P^2$

বা, $\frac{sin\theta+1}{1-sin\theta} = P^2$

বা, $\frac{sin\theta+1+1-sin\theta}{sin\theta+1-1+sin\theta} = \frac{P^2+1}{P^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2sin\theta} = \frac{P^2+1}{P^2-1}$

বা, $\frac{1}{sin\theta} = \frac{P^2+1}{P^2-1}$

বা, $sin\theta = \frac{P^2-1}{P^2+1}$

বা, $\sin^2\theta = \frac{(p^2-1)^2}{(P^2+1)^2}$

বা, $1 - \cos^2\theta = \frac{(p^2-1)^2}{(P^2+1)^2}$

বা, $\cos^2\theta = 1 - \frac{(p^2-1)^2}{(P^2+1)^2}$

বা, $\cos^2\theta = \frac{(P^2+1)^2-(p^2-1)^2}{(P^2+1)^2} = \frac{4P^2}{(P^2+1)^2}$

$\therefore \boldsymbol{cos\theta = \frac{2P}{P^2+1}}$ [দেখানো হলো]

(গ) $Q = 3$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণটি সমাধান করো। যখন, $0 < \theta < 2\pi$.

যেহেতু, $Q = 3$

$\therefore \cot^2\theta + cosec^2\theta = 3$

বা, $\cot^2\theta + 1 + \cot^2\theta = 3$

বা, $2\cot^2\theta = 2$

বা, $\cot\ \theta = \pm 1$

$\therefore \cot\ \theta = 1$ অথবা, $\cot\ \theta = -1$

এখন $\cot\ \theta = 1$ হলে,

$\cot\ \theta = 1$

বা, $cot\theta = \cot\frac{\pi}{4}$

বা, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$cot\theta = 1$

বা, $cot\theta = \cot\frac{\pi}{4}$

বা, $cot\theta = \cot\left(2.\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \theta = \frac{5\pi}{4}$

আবার, $\cot\ \theta = -1$ হলে,

$\cot\ \theta = -1$

বা, $cot\theta = -\cot\frac{\pi}{4}$

বা, $cot\theta = \cot\left(2.\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}$

$cot\theta = -1$

বা, $cot\theta = -\cot\frac{\pi}{4}$

বা, $cot\theta = \cot\left(4.\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \theta = \frac{7\pi}{4}$

নির্ণেয় সমাধান: $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}}$

সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন

$p = 1 + \log_a(bc)\,, q = 1 + \log_b(ca)\,, r = 1 + \log_c(ab)$ এবং $x^2 + y^2 = 7xy$

[সকল বোর্ড '১৮]

(ক) p^{-1} এর মান নির্ণয় করো।

(খ) দেখাও যে, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$

(গ) প্রমাণ করো যে, $\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$

উত্তর

(ক) p^{-1} এর মান নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $p = 1 + \log_a bc$

বা, $p = \log_a a + \log_a bc$

বা, $p = \log_a abc$

বা, $\frac{1}{p} = \frac{1}{\log_a abc}$

$\therefore \boldsymbol{p^{-1} = \log_{abc} a}$ $\quad [\because \boldsymbol{\log_b a \times \log_a b = 1}]$ $\quad (Ans)$

(খ) দেখাও যে, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1.$

দেওয়া আছে, $p=1+\log_a(bc)$

বা, $p=\log_a a+\log_a bc$

বা, $p=\log_a abc$

বা, $a^p=abc$

বা, $a=(abc)^{\frac{1}{p}}\ldots\ldots\ldots(i)$

অনুরূপভাবে, $\text{b}=(abc)^{\frac{1}{q}}\ldots\ldots\ldots(ii)$

এবং, $c=(abc)^{\frac{1}{r}}\ldots\ldots\ldots(iii)$

$(i)\times(ii)\times(iii)$ থেকে পাই,

$$abc=(abc)^{\frac{1}{p}}.(abc)^{\frac{1}{q}}.(abc)^{\frac{1}{r}}$$

বা, $abc=(abc)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}}$

$\therefore \boldsymbol{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1}$ [দেখানো হলো]

(গ) প্রমাণ করো যে, $\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$

দেওয়া আছে, $x^2 + y^2 = 7xy$

বা, $x^2 + y^2 + 2xy = 7xy + 2xy$ **[উভয়পক্ষে $2xy$ যোগ করে]**

বা, $(x+y)^2 = 9xy$

বা, $\frac{(x+y)^2}{9} = xy$

বা, $\left(\frac{x+y}{3}\right)^2 = xy$

বা, $\log\left(\frac{x+y}{3}\right)^2 = \log(xy)$ **[উভয়পক্ষে log নিয়ে]**

বা, $2\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \log(xy)$

বা, $\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}\log(xy) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$ $[\because \log(M \times N) = \log M + \log N]$

$\therefore \log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$ (প্রমাণিত)

$(i)\ \frac{1}{2x+1}+\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+1)^3}+\cdots$ একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

$(ii)\ \left(2+\frac{x}{4}\right)^6$ ও $\left(k-\frac{y}{3}\right)^7$ দুইটি দ্বিপদী রাশি। [সকল বোর্ড '১৮]

(ক) ১ম দ্বিপদী রাশিকে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত করো।

(খ) যদি k^3 এর সহগ 560 হয়, তবে y এর মান নির্ণয় করো।

(গ) উদ্দীপকে প্রদত্ত অসীম ধারার (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে তবে তা নির্ণয় করো।

উত্তর

(ক) ১ম দ্বিপদী রাশিকে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত করো।

প্রদত্ত প্রথম দ্বিপদী রাশি $\left(2+\frac{x}{4}\right)^6$

$$= 2^6 + {}^6C_1 2^{6-1}\left(\frac{x}{4}\right)^1 + {}^6C_2 2^{6-2}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + {}^6C_3 2^{6-3}\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \cdots$$

$$= 64 + 6\times 32\left(\frac{x}{4}\right) + 15\times 16\times\frac{x^2}{16} + 20\times 8\times\frac{x^3}{64} + \cdots$$

$$= \mathbf{64 + 48x + 15x^2 + \frac{5}{2}x^3} + \cdots$$

(খ) যদি k^3 এর সহগ 560 হয়, তবে y এর মান নির্ণয় করো।

উদ্দীপকে প্রদত্ত দ্বিতীয় দ্বিপদী রাশি, $\left(k-\frac{y}{3}\right)^7 = k^7 + {}^7C_1 k^{7-1}\left(-\frac{y}{3}\right)^1 + {}^7C_2 k^{7-2}\left(-\frac{y}{3}\right)^2 +$

${}^7C_3 k^{7-3}\left(-\frac{y}{3}\right)^3 + {}^7C_4 k^{7-4}\left(-\frac{y}{3}\right)^4 + \cdots$

$= k^7 - \frac{7}{3}yk^6 + \frac{7}{3}y^2k^5 - \frac{35}{27}y^3k^4 + \frac{35}{81}y^4k^3 - \cdots$

k^3 এর সহগ $\frac{35}{81}y^4$

প্রশ্নমতে, $\frac{35}{81}y^4 = 560$

বা, $35y^4 = 45360$

বা, $y^4 = 1296$

বা, $y = \pm 6$

$\therefore$ **y এর মান ± 6**

(গ) উদ্দীপকে প্রদত্ত অসীম ধারার (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে তবে তা নির্ণয় করো।

এখানে, প্রথম পদ, $a = \frac{1}{2x+1}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{(2x+1)^2}}{\frac{1}{2x+1}} = \frac{1}{2x+1}$

গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $-1 < r < 1$ হয়।

বা, $-1 < \frac{1}{2x+1} <$ হয়।

এখন, $-1 < \frac{1}{2x+1}$

বা, $-1 > 2x + 1$

বা, $2x + 1 < -1$

বা, $2x < -1 - 1$

বা, $2x < -1$

$\therefore x < -1$

অথবা, $\frac{1}{2x+1} < 1$

বা, $2x + 1 > 1$

বা, $2x > 1 - 1$

বা, $2x > 0$

$\therefore x > 0$

অসীমতক সমষ্টি, $S_\propto = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}}$

$$= \frac{\frac{1}{2x+1}}{\frac{2x+1-1}{2x+1}} = \frac{1}{2x+1} \times \frac{2x+1}{2x} = \mathbf{\frac{1}{2x}}$$

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

$(i) 5x + 4y - 20 = 0$ এবং

$(ii) 4x - 5y + 20 = 0$ দুইটি সরলরেখার সমীকরণ। [সকল বোর্ড – ২০১৮]

(ক) চিত্রসহ নৈকতলীয় রেখার অন্তর্গত কোণের সংজ্ঞা দাও।

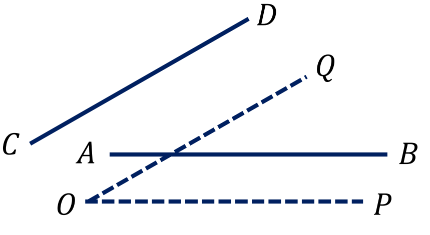
(খ) ঢাল নির্ণয়ের মাধ্যমে দেখাও যে, (i) নং ও (ii) নং সরলরেখা দুইটি পরস্পরের উপর লম্ব এবং লেখচিত্রের মাধ্যমে সত্যতা যাচাই কর।

(গ) দেখাও যে, (i) নং সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ অঙ্কন করে তার ক্ষেত্রফল 10 বর্গ একক।

উত্তর

(ক) চিত্রসহ নৈকতলীয় রেখার অন্তর্গত কোণের সংজ্ঞা দাও।

নৈকতলীয় রেখার অন্তর্গত কোণ : দুইটি নৈকতলীয় রেখার অন্তর্গত কোণ তাদের যেকোনো একটি ও তার উপরস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত অপরটির সমান্তরাল রেখার অন্তর্গত কোণের মান সমান। আবার দুইটি নৈকতলীয় রেখার প্রত্যেকের সমান্তরাল দুইটি রেখা কোনো বিন্দুতে অঙ্কন করলে ঐ বিন্দুতে উৎপন্ন কোণের পরিমাণও নৈকতলীয় রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান।



মনে করি, AB ও CD দুইটি নৈকতলীয় রেখা। যেকোনো O বিন্দুতে AB ও CD এর সমান্তরাল যথাক্রমে OP এবং OQ রেখাদ্বয় অঙ্কন করলে $\angle POQ$ ই AB ও CD এর অন্তর্গত কোণ নির্দেশ করবে।

(খ) ঢাল নির্ণয়ের মাধ্যমে দেখাও যে, (i) নং ও (ii) নং সরলরেখা দুইটি পরস্পরের উপর লম্ব এবং লেখচিত্রের মাধ্যমে সত্যতা যাচাই কর।

প্রদত্ত (i) নং রেখা, $5x + 4y - 20 = 0$

বা, $4y = -5x + 20$

$\therefore y = -\frac{5}{4}x + 5$

(i) নং রেখার ঢাল, $-\frac{5}{4}$

আবার, প্রদত্ত (ii) নং রেখা, $4x - 5y + 20 = 0$

বা, $5y = 4x + 20$

$\therefore y = \frac{4}{5}x + 4$

$\therefore (ii)$ নং রেখার ঢাল, $\frac{4}{5}$

$\therefore$ ঢালদ্বয়ের গুণফল $= -\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = -1$

$\therefore$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব। **(দেখানো হলো)**

(i) নং হতে পাই, $5x + 4y = 20$

বা, $\frac{5x}{20} + \frac{4y}{20} = 1$

$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$

(ii) নং হতে পাই, $4x - 5y = -20$

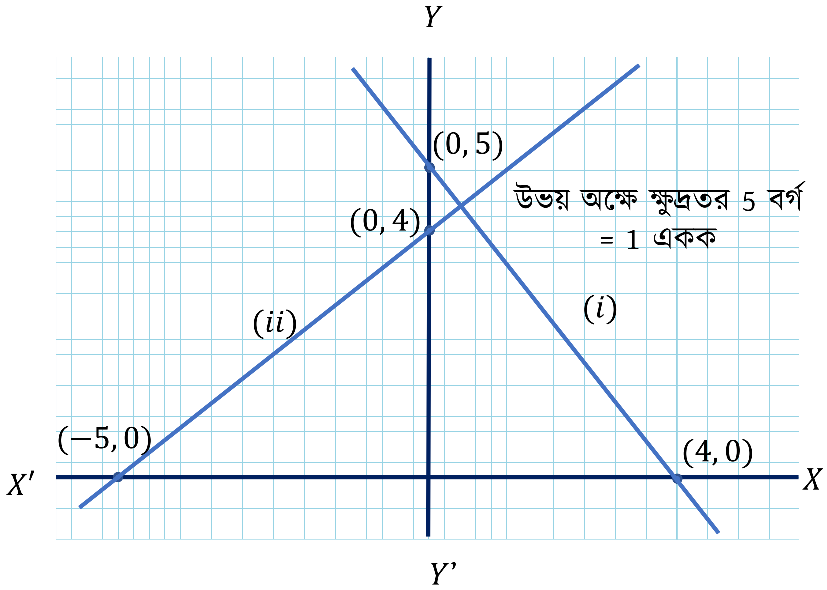
বা, $\frac{4x}{-20} + \frac{5y}{20} = 1$

$\therefore \frac{x}{-5} + \frac{y}{4} = 1$

ছক কাগজে $(4, 0)$ এবং $(0, 5)$ বিন্দু স্থাপন করে যোগ করে (i) নং রেখা পাই।

ছক কাগজে $(-5, 0)$ এবং $(0, 4)$ বিন্দু স্থাপন করে যোগ করে (ii) নং রেখা পাই।

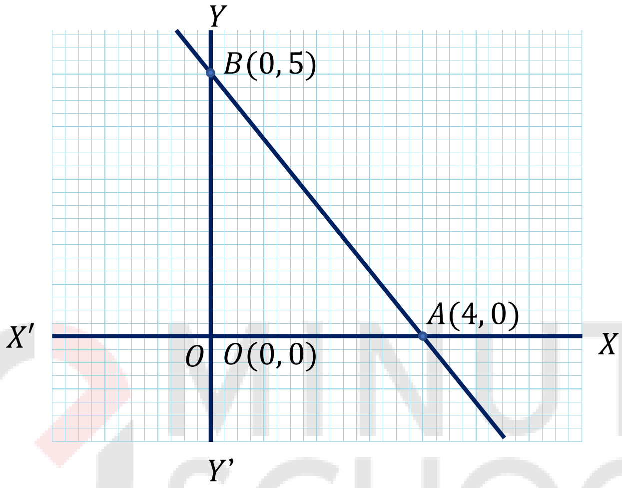
লেখচিত্র হতে দেখা যায় (i) ও (ii) নং রেখা পরস্পর লম্ব।


Y
(0, 5)
(0, 4)
উভয় অক্ষে ক্ষুদ্রতর 5 বর্গ
= 1 একক
(ii)
(i)
(−5, 0)
(4, 0)
X′
X
Y’

(গ) দেখাও যে, (i) নং সরলরেখাটি অখদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ অঙ্কন করে তার ক্ষেত্রফল 10 বর্গ একক।

'খ' হতে পাই, (i) নং সরলরেখা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$

(i) নং রেখা x অক্ষকে $A(4, 0)$ এবং y অক্ষকে $B(0, 5)$ বিন্দুতে ছেদ করে।



এখন, ΔOAB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{(0 + 20 + 0) - (0 + 0 + 0)\}$

$= \frac{1}{2} \times 20$

$= 10$ বর্গ একক **(দেখানো হলো)**

ভেক্টর

ΔPQR এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N। **[সকল বোর্ড – ২০১৮]**

(ক) চিত্রসহ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও।

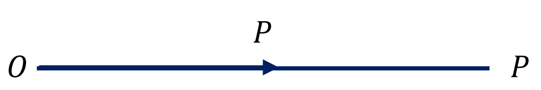
(খ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN = \frac{1}{2}QR$.

(গ) উদ্দীপকের তথ্য অনুসারে $QRNM$ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$.

উত্তর

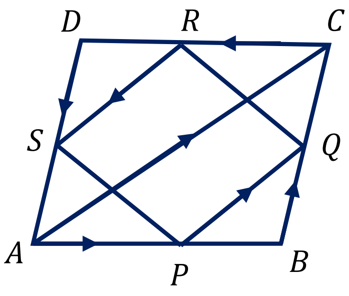
(ক) চিত্রসহ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও।

সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু O সাপেক্ষে ঐ সমতলের যেকোনো P বিন্দুর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়।



$\overrightarrow{OP}$ কে O বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়।

(খ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN = \frac{1}{2}OR.$



ΔPQR এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N।

এখন, M, N যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $MN = \frac{1}{2}OR.$

প্রমাণ : ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}$ ... ... (i)

এবং $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$ ... ... (ii)

কিন্তু $\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PN}$ এবং $\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PM}$ **[$\because$ PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N]**

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}$ হতে পাই,

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ})$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$$

এখন, $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QR}|$

$\therefore MN = \frac{1}{2}OR.$ **(প্রমাণিত)**

(গ) উদ্দীপকের তথ্য অনুসারে $QRNM$ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$.

$QRNM$ ট্রাপিজিয়ামের QR ও MN সমান্তরাল বাহু এবং QN ও MR কর্ণের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

প্রমাণ করতে হবে যে, $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$.

প্রমাণ : ধরি, কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে Q, R, N, M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{q}, \underline{r}, \underline{n}, \underline{m}, \overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$ ও $\overrightarrow{MN} = \underline{n} - \underline{m}$.

D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{n})$

ও E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{m})$

$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{m}) - \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{n})$

$= \frac{1}{2}\left(\underline{r} - \underline{q}\right) - (\underline{n} - \underline{m})$

$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{MN})$

এখন, $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{QR}| - |\overrightarrow{MN}|)$

$\therefore DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$. **(প্রমাণিত)**

সম্ভাবনা

একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হলো। [সকল বোর্ড - ২০১৮]

(ক) দেখাও যে, কোনো ঘটনার সম্ভাবনার মান 0 হতে 1 এর মধ্যে থাকে।

(খ) উদ্দীপকের সম্ভাব্য ঘটনায় Probability tree অঙ্কন করে তিনটি হেড ও কমপক্ষে একটি টেল পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

(গ) দেখাও যে, উদ্দীপকের মুদ্রাটি n- সংখ্যকবার নিক্ষেপ করলে সংঘটিত ঘটনা 2^n কে সমর্থন করে।

উত্তর

(ক) দেখাও যে, কোনো ঘটনার সম্ভাবনার মান 0 হতে 1 এর মধ্যে থাকে।

মনে করি, কোনো দৈব পরিক্ষায় মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= n$

এই পরীক্ষায় কোনো ঘটনা ঘটার অনুকূল ফলাফলের সর্বনিম্ন মান $= 0$

$\therefore$ ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা $= \frac{0}{n} = 0$

আবার, ঐ ঘটনা ঘটার অনুকূল ফলাফলের সর্বোচ্চ মান $= n$

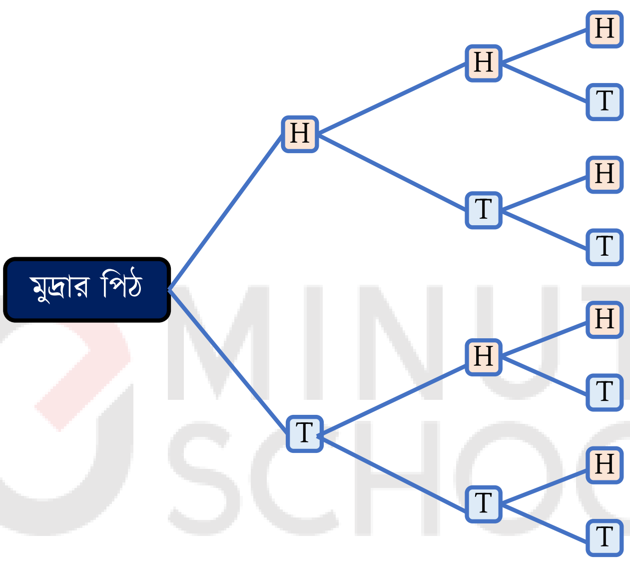
$\therefore$ ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা $= \frac{n}{n} = 1$

এই কারণে কোনো ঘটনার সম্ভাবনার মান 0 হতে 1 এর মধ্যে থাকে।

(দেখানো হলো)

(খ) উদ্দীপকের সম্ভাব্য ঘটনায় Probability tree অঙ্কন করে তিনটি হেড ও কমপক্ষে একটি টেল পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ পরীক্ষায় মোট ফলাফল নিম্নের Probability tree এর মাধ্যমে দেখানো হলো-



$\therefore$ নমুনাক্ষেত্রটি : $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

তিনটিই হেড $(3H)$ পাওয়ার অনুকূল ফলাফল $= 1$ টি। যথা : HHH

অনুকূল ফলাফল $= 1$ এবং সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল $= 8$

$\therefore$ তিনটিই হেড $(3H)$ পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{1}{8}$

কমপক্ষে একটি টেল $(1T)$ পাওয়ার অনুকূল ফলাফল $= 7$ টি।

যথা : $HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT$

অনুকূল ফলাফল $= 7$ এবং সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল $= 8$

$\therefore$ কমপক্ষে একটি টেল $(1T)$ পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{7}{8}$

(গ) দেখাও যে, উদ্দীপকের মুদ্রাটি n- সংখ্যকবার নিক্ষেপ করলে সংঘটিত ঘটনা 2^n কে সমর্থন করে।

আমরা জানি,

একটি মুদ্রায় দুইটি পিঠ যেমন H এবং T থাকে।

অর্থাৎ একটি মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করলে সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল হবে 2 বা 2^1

আবার, একটি মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপ করলে সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল হবে 4 বা 2^2

আবার, একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করলে সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল হবে 8 বা 2^3

অনুরূপভাবে বলা যায়, একটি মুদ্রা n সংখ্যকবার নিক্ষেপ করলে সম্ভাব্য ফলাফল হবে 2^n

(দেখানো হলো)