# Higher Math

## YEAR 2019

# Dhaka BOARD

$B = \{x : x$ পূর্ণসংখ্যা এবং $x^2 < 5\}$

$R = \{(x, y) : x \in B, y \in B$ এবং $2x = y + 2\}$

$F(y) = y^3 - 3y^2 + 5y - 9.$ [ ঢাকা বোর্ড – ২০১৯ ]

(ক) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-3x}}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।

(খ) $R$ অণ্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করে অণ্বয়টি ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর।

(গ) $F(y)$ কে $(y - s)$ এবং $(y - t)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে এবং $s \neq t$ হয়, তবে দেখাও যে, $s^2 + t^2 + st - 3s - 3t + 5 = 0.$



## উত্তর

(ক) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-3x}}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-3x}}$

এখন, $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-3x}} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $\sqrt{1-3x} > 0$ হয়।

বা, $1 - 3x > 0$ **[বর্গ করে]**

বা, $1 > 3x$

বা, $\frac{1}{3} > x$

$\therefore x < \frac{1}{3}$

$\therefore$ডোম $\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{x} \epsilon \mathbb{R} : \boldsymbol{x} < \frac{1}{3}\}$

(খ) $R$ অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করে অন্বয়টি ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর।

দেওয়া আছে, $B = \{x : x$ পূর্ণসংখ্যা এবং $x^2 < 5\}$

এখানে, $x = 0$ হলে, $x^2 = 0^2 = 0 < 5$

$x = \pm 1$ হলে, $x^2 = (\pm 1)^2 = 1 < 5$

$x = \pm 2$ হলে, $x^2 = (\pm 2)^2 = 4 < 5$

$x = \pm 3$ হলে, $x^2 = (\pm 3)^2 = 9 \nless 5$

$\therefore B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

প্রদত্ত অন্বয় $R = \{(x, y) : x \in B, y \in B$ এবং $2x = y + 2\}$

$R$ এ বর্ণিত শর্ত হতে পাই, $2x = y + 2$

বা, $y + 2 = 2x$

$\therefore y = 2x - 2$

এখন, প্রত্যেক $x \in B$ এর জন্য $y = 2x - 2$ এর মান নির্ণয় করি :

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ |

যেহেতু $-6 \notin B$ এবং $-4 \notin B$

সেহেতু $(-2, -6) \notin R$ এবং $(-1, -4) \notin R$

$\therefore R = \{(0, -2), (1, 0), (2, 2)\}$

$R$ অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় নেই।

$\therefore$ **$R$ অন্বয়টি একটি ফাংশন।**

(গ) $F(y)$ কে $(y-s)$ এবং $(y-t)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে এবং $s \neq t$ হয়, তবে দেখাও যে, $s^2+t^2+st-3s-3t+5=0$.

দেওয়া আছে,

$$F(y) = y^3 - 3y^2 + 5y -$$

$F(y)$ কে $(y-s)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ,

$$F(s) = s^3 - 3s^2 + 5s - 9$$

$F(y)$ কে $(y-t)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ,

$$F(t) = t^3 - 3t^2 + 5t - 9$$

শর্তমতে, $F(s) = F(t)$

বা, $s^3 - 3s^2 + 5s - 9 = t^3 - 3t^2 + 5t - 9$

বা, $s^3 - 3s^2 + 5s - 9 - t^3 + 3t^2 - 5t + 9 = 0$

বা, $s^3 - t^3 - 3(s^2 - t^2) + 5(s-t) = 0$

বা, $(s-t)(s^2+st+t^2) - 3(s+t)(s-t) + 5(s-t) = 0$

বা, $(s-t)(s^2+st+t^2-3s-3t+5) = 0$

বা, $(s^2+st+t^2-3s-3t+5) = 0$    $[\because \boldsymbol{s \neq t}]$

$\therefore s^2+t^2+st-3s-3t+5=0$    **[দেখানো হলো]**

# জ্যামিতি

$PQRS$ চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত এবং $PR$ ও $QS$ চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ। [ঢা. বো. ১৯]

(ক) $ABC$ সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ $AC = 2$ সে. মি. হলে ত্রিভুজের মধ্যমাসমূহের বর্গের সমষ্টি নির্ণয় করো।

(খ) প্রমাণ করো যে, $PR$ ও $QS$ এর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

(গ) $PR$ ব্যাস এবং $Q$ হতে $PR$ এর উপর $QF$ লম্ব হলে, প্রমাণ করো যে, $QF^2 = PF.RF$



## উত্তর

(ক) $ABC$ সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ $AC = 2$ সে. মি. হলে ত্রিভুজের মধ্যমাসমূহের বর্গের সমষ্টি নির্ণয় করো।

মনে করি, সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের দৈর্ঘ্য $d, e, f$ সে. মি. এবং অতিভুজ $AC = b = 2$ সে. মি.।

আমরা জানি, সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে,

মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি $d^2 + e^2 + f^2 = \frac{3}{2}b^2$

$= \frac{3}{2} \times 2^2$ বর্গ সে. মি.

$= 3 \times 2$ বর্গ সে. মি.

$= 6$ বর্গ সে. মি. **(Ans)**

(খ) প্রমাণ করো যে, $PR$ ও $QS$ এর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

**বিশেষ নির্বচনঃ** মনে করি, বৃত্তে অন্তর্লিখিত $PQRS$ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে $PQ$ ও $RS$ এবং $QR$ ও $PS$। $PR$ এবং

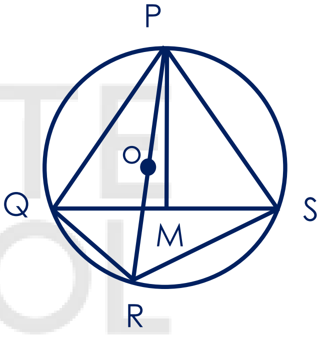
$QS$ চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $PR.QS = PQ.RS + PS.QR$

**অঙ্কনঃ** $\angle QPR$ কে $\angle SPR$ থেকে ছোট ধরে নিয়ে $P$ বিন্দুতে $PS$ রেখাংশের সাথে $\angle QPR$ –এর সমান করে $\angle SPM$ আঁকি যেন $PM$ রেখা $QS$ কর্ণকে $M$ বিন্দুতে ছেদ করে।

**প্রমাণঃ** অঙ্কন অনুসারে $\angle QPR = \angle SPM$

উভয়পক্ষে $\angle RPM$ যোগ করে পাই

$$\angle QPR + \angle RPM = \angle SPM + \angle RPM$$




অর্থাৎ, $\angle QPM = \angle RPS$

এখন $\Delta PQM$ ও $\Delta PRS$ এর মধ্যে $\angle QPM = \angle RPS$

$\angle PQM = \angle PRS$ **[একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]**

এবং অবশিষ্ট $\angle PMQ =$ অবশিষ্ট $\angle PSR$

$\therefore \Delta PQM$ ও $\Delta PRS$ সদৃশকোণী।

$$\frac{QM}{RS} = \frac{PQ}{PR}$$

অর্থাৎ, $PR.QM = PQ.RS \dots\dots (i)$

আবার, $\Delta PQR$ ও $\Delta PMS$ এর মধ্যে

$\angle QPR = \angle SPM$ **[অঙ্কন অনুসারে]**

$\angle PRQ = \angle PSM$ **[একই বৃত্তাংশস্থিত কোন সমান বলে]**

এবং অবশিষ্ট $\angle PQR =$ অবশিষ্ট $\angle PMS$

$\therefore \Delta PQR$ ও $\Delta PMS$ সদৃশকোণী।

$$\frac{PS}{PR} = \frac{MS}{QR}$$

অর্থাৎ, $PR.MS = QR.PS \dots\dots (ii)$

এখন, সমীকরণ $(i)$ ও $(ii)$ যোগ করে পাই,

$PR.QM + PR.MS = PQ.RS + QR.PS$

বা, $PR(QM + MS) = PQ.RS + QR.PS$

অর্থাৎ, $PR.QS = PQ.RS + QR.PS$ **[যেহেতু $QM + MS = QS$]**

$PR.QS = PQ.RS + PS.QR$ **(প্রমাণিত)**

(গ) $PR$ ব্যাস এবং $Q$ হতে $PR$ এর উপর $QF$ লম্ব হলে, প্রমাণ করো যে, $QF^2 = PF.RF$

**বিশেষ নির্বচনঃ** $O$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাস $PR$ হলে,

$\angle PQR =$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ $= 1$ সমকোণ

$\therefore \Delta PQR$ সমকোণী ত্রিভুজ যার অতিভুজ $= PR$ এবং $QF \perp PR$। প্রমাণ করতে হবে যে, $QF^2 = PF.RF$

**প্রমাণঃ** $\angle PQR = 90°$

$\therefore \angle PQF + \angle FQR = 90° \ldots\ldots\ldots (i)$

আবার, $QF \perp PR$ বলে $\angle PFQ = \angle QFR = 90°$

$\Delta PQF$ এ $\angle PFQ + \angle PQF + \angle QPF = 180°$

বা, $90 + \angle PQF + \angle QPF = 180°$

$\therefore \angle PQF + \angle QPF = 90° \ldots\ldots\ldots (ii)$

$(i)$ নং এবং $(ii)$ নং হতে পাই, $\angle PQF + \angle FQR = \angle PQF + \angle QPF$

$\therefore \angle FQR = \angle QPF$

$\Delta PQF$ এবং $\Delta QFR$ এ $\angle PFQ = \angle QFR, \angle QPF = \angle FQR$

অবশিষ্ট $\angle PQF =$ অবশিষ্ট $\angle FRQ$

$\therefore \Delta PQF$ এবং $\Delta QFR$ সদৃশ

$\therefore \frac{PQ}{QR} = \frac{QF}{FR} = \frac{PF}{FQ}$

অর্থাৎ, $\frac{QF}{RF} = \frac{PF}{QF}$

বা, $QF^2 = PF.RF$ **(প্রমাণিত)**

# ত্রিকোণমিতি

$tan\theta = a, sec\theta = b$ এবং $\frac{cos\theta}{1-sin\theta} = c$ [ঢা. বো. '১৯]

(ক) ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত $5:6:7$ হলে, ক্ষুদ্রতম কোনটিকে রেডিয়ানে প্রকাশ করো।

(খ) প্রমাণ করো যে, $\frac{a+b-1}{a-b+1} = c$.

(গ) $c = \sqrt{3}$ হলে, $\theta$ এর মান নির্ণয় করো, যখন, $0 < \theta \leq 2\pi$.

## উত্তর

(ক) ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত $5:6:7$ হলে, ক্ষুদ্রতম কোনটিকে রেডিয়ানে প্রকাশ করো।

ধরি, কোন তিনটি যথাক্রমে $5x^e, 6x^e$ ও $7x^e$

প্রশ্নমতে, $5x^e + 6x^e + 7x^e = 180°$ **[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ $= \pi^e$]**

বা, $18x^e = \pi^e$

বা, $x = \frac{\pi}{18}$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতম কোন $= 5x^e$

$$= \left(5 \times \frac{\pi}{18}\right) = \frac{5\pi}{18} \text{ রেডিয়ান}$$

(খ) প্রমাণ করো যে, $\frac{a+b-1}{a-b+1} = c.$

দেওয়া আছে, $tan\theta = a, sec\theta = b$

এবং $\frac{cos\theta}{1-sin\theta} = c$

বামপক্ষ $= \frac{a+b-1}{a-b+1}$

$= \frac{tan\theta+sec\theta-1}{tan\theta-sec\theta+1}$

$= \frac{tan\theta+sec\theta-(\sec^2\theta-\tan^2\theta)}{tan\theta-sec\theta+1}$ $\quad [\because \boldsymbol{sec^2\theta - tan^2\theta = 1}]$

$= \frac{(tan\theta+sec\theta)-(sec\theta+tan\theta)(sec\theta-tan\theta)}{tan\theta-sec\theta+1}$

$= \frac{(tan\theta+sec\theta)(1-sec\theta+tan\theta)}{(tan\theta-sec\theta+1)}$

$= tan\theta + sec\theta$

$= \frac{sin\theta}{cos\theta} + \frac{1}{cos\theta}$

$= \frac{sin\theta+1}{\cos\theta}$

$= \frac{(sin\theta+1)(1-sin\theta)}{cos\theta(1-sin\theta)}$

$= \frac{1-\sin^2\theta}{cos\theta(1-sin\theta)}$ $\quad [\because \boldsymbol{1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta}]$

$= \frac{cos\theta}{1-sin\theta} = c =$ ডানপক্ষ

$\therefore \boldsymbol{\frac{a+b-1}{a-b+1} = c.}$ **[প্রমাণিত]**

(গ) $c = \sqrt{3}$ হলে, $\theta$ এর মান নির্ণয় করো, যখন, $0 < \theta \leq 2\pi$

দেওয়া আছে, $\frac{cos\theta}{1-sin\theta} = c$

যেহেতু, $c = \sqrt{3}$

$\therefore \frac{cos\theta}{1-sin\theta} = \sqrt{3}$

বা, $\left(\frac{cos\theta}{1-sin\theta}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$ **[উভয়পক্ষকে বর্গ করে]**

বা, $\frac{(1-\sin^2\theta)}{(1-sin\theta)(1-sin\theta)} = 3$

বা, $\frac{(1+sin\theta)(1-sin\theta)}{(1-sin\theta)(1-sin\theta)} = 3$

বা, $\frac{(1+sin\theta)}{(1-sin\theta)} = 3$

বা, $\frac{1+sin\theta+1-sin\theta}{1+sin\theta-1+sin\theta} = \frac{3+1}{3-1}$ **[যোজন বিয়োজন করে]**

বা, $\frac{2}{2sin\theta} = \frac{4}{2}$

বা, $\frac{1}{sin\theta} = 2$

বা, $sin\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore$ ১ম চতুর্ভাগে, $sin\theta = sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

আবার, ২য় চতুর্ভাগে, $sin\theta = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = sin\frac{5\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{5\pi}{6}$

কিন্তু, $\theta = \frac{5\pi}{6}$ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। $\therefore \theta = \frac{5\pi}{6}$ গ্রহণযোগ্য নয়।

**নির্ণেয় মান: $\boldsymbol{\theta} = \frac{\pi}{6}$**

# সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন

$x^{\frac{1}{p}} = y^{\frac{1}{q}} = z^{\frac{1}{r}}, m = 2, n = 3$ এবং $g^2 = h^3$ [ঢা. বো. '১৯]

(ক) $3 + 7x - 5x^2 = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় করো।

(খ) প্রমাণ করো যে, $\left(\frac{g}{h}\right)^{\frac{n}{m}} + \left(\frac{h}{g}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt{g} + \frac{1}{\sqrt[3]{h}}$

(গ) $xyz = 1$ হলে, প্রমাণ করো যে, $\frac{1}{a^q+a^{-r}+1} + \frac{1}{a^r+a^{-p}+1} + \frac{1}{a^p+a^{-q}+1} = 1$



## উত্তর

(ক) $3 + 7x - 5x^2 = 0$ সমীকরণটির মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় করো।

$3 + 7x - 5x^2 = 0$ অর্থাৎ $-5x^2 + 7x + 3 = 0$

সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$$a = -5, b = 7, c = 3$$

$\therefore$ নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac = 7^2 - 4(-5).3 = 49 + 60$

$= 109 > 0$ কিন্তু পূর্ণবর্গ নয়।

**$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের মুলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ হবে।**

(খ) প্রমাণ করো যে, $\left(\frac{g}{h}\right)^{\frac{n}{m}} + \left(\frac{h}{g}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt{g} + \frac{1}{\sqrt[3]{h}}$

দেওয়া আছে, $m = 2, n = 3$ এবং $g^2 = h^3$

এখন,

বামপক্ষ $= \left(\frac{g}{h}\right)^{\frac{n}{m}} + \left(\frac{h}{g}\right)^{\frac{m}{n}}$

$= \left(\frac{g}{h}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{h}{g}\right)^{\frac{2}{3}}$ **[$m$ ও $n$ এর মান বসিয়ে]**

$= \left(\frac{g^3}{h^3}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{h^2}{g^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{g^3}{g^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{h^2}{h^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ $[g^2 = h^3]$

$= g^{\frac{1}{2}} + (h^{-1})^{\frac{1}{3}} = \sqrt{g} + h^{-\frac{1}{3}}$

$= \sqrt{g} + \left(h^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = \sqrt{g} + \frac{1}{\sqrt[3]{h}} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{g}{h}\right)^{\frac{n}{m}} + \left(\frac{h}{g}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt{g} + \frac{1}{\sqrt[3]{h}}$ (প্রমাণিত)

(গ) $xyz = 1$ হলে, প্রমাণ করো যে, $\frac{1}{a^q+a^{-r}+1}+\frac{1}{a^r+a^{-p}+1}+\frac{1}{a^p+a^{-q}+1}=1$

দেওয়া আছে, $x^{\frac{1}{p}} = y^{\frac{1}{q}} = z^{\frac{1}{r}}$

ধরি, $x^{\frac{1}{p}} = y^{\frac{1}{q}} = z^{\frac{1}{r}} = \mathrm{k}$

তাহলে, $x^{\frac{1}{p}} = k$

$\therefore x = k^p$

একইভাবে, $y = k^q, z = k^r$

আবার, $xyz = 1$

$\therefore k^p.k^q.k^r = 1$

বা, $k^{p+q+r} = k^0$

$\therefore p+q+r = 0$

বামপক্ষ $= \frac{1}{a^q+a^{-r}+1}+\frac{1}{a^r+a^{-p}+1}+\frac{1}{a^p+a^{-q}+1}$

$= \frac{1}{a^q+\frac{1}{a^r}+1}+\frac{1}{a^r+a^{-p}+1}+\frac{1}{a^p+a^{-q}+1}$

$= \frac{a^r}{1+a^r+a^{q+r}}+\frac{1}{1+a^r+a^{q+r}}+\frac{1}{a^p+\frac{1}{a^q}+1}$ $\quad [\because \boldsymbol{p+q+r=0, q+r=-p}]$

$= \frac{a^r}{1+a^r+a^{q+r}}+\frac{1}{1+a^r+a^{q+r}}+\frac{a^q}{a^{p+q}+a^q+1}$

$= \frac{a^r}{1+a^r+a^{q+r}}+\frac{1}{1+a^r+a^{q+r}}+\frac{a^q}{a^{-r}+a^q+1}$ $\quad [\because \boldsymbol{p+q+r=0, p+q=-r}]$

$= \frac{a^r}{1+a^r+a^{q+r}}+\frac{1}{1+a^r+a^{q+r}}+\frac{a^q}{\frac{1}{a^r}+a^q+1}$

$= \frac{a^r}{1+a^r+a^{q+r}}+\frac{1}{1+a^r+a^{q+r}}+\frac{a^q.a^r}{1+a^r+a^{q+r}}$

$= \frac{a^r+1+a^{q+r}}{1+a^r+a^{q+r}} = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \boldsymbol{\frac{1}{a^q+a^{-r}+1}+\frac{1}{a^r+a^{-p}+1}+\frac{1}{a^p+a^{-q}+1}=1}$ **(প্রমাণিত)**

# সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন

$P = x^{a-b}, Q = x^{b-c}, R = x^{c-a}$ [ঢা. বো. '১৯]

(ক) $\log\left(\frac{P}{R}\right) = 0$ হলে, দেখাও যে, $b + c = 2a$

(খ) প্রমাণ করো যে, $\frac{1}{1+Q+P^{-1}} + \frac{1}{1+R+Q^{-1}} + \frac{1}{1+P+R^{-1}} = 1$

(গ) প্রমাণ করো যে, $(c+a)\log(PQ) + (a+b)\log(QR) + (b+c)\log(PR) = 0$

## উত্তর

(ক) $\log\left(\frac{P}{R}\right) = 0$ হলে, দেখাও যে, $b + c = 2a$

দেওয়া আছে, $P = x^{a-b}, Q = x^{b-c}, R = x^{c-a}$

প্রশ্নমতে, $\log\left(\frac{P}{R}\right) = 0$

বা, $\log\left(\frac{x^{a-b}}{x^{c-a}}\right) = 0$

বা, $\log x^{a-b-c+a} = \log 1$ $\quad [\because \mathbf{\log 1 = 0}]$

বা, $x^{2a-b-c} = 1$

বা, $x^{2a-b-c} = x^0$ $\quad [\because \mathbf{x^0 = 1}]$

বা, $2a - b - c = 0$

$\therefore \boldsymbol{b + c = 2a}$ [দেখানো হলো]

(খ) প্রমাণ করো যে, $\frac{1}{1+Q+P^{-1}}+\frac{1}{1+R+Q^{-1}}+\frac{1}{1+P+R^{-1}}=1$

বামপক্ষ $=\frac{1}{1+Q+P^{-1}}+\frac{1}{1+R+Q^{-1}}+\frac{1}{1+P+R^{-1}}$

$=\frac{1}{1+x^{b-c}+(x^{a-b})^{-1}}+\frac{1}{1+x^{c-a}+(x^{b-c})^{-1}}+\frac{1}{1+x^{a-b}+(x^{c-a})^{-1}}$ [মান বসিয়ে]

$=\frac{x^{-b}}{x^{-b}(1+x^{b-c}+x^{b-a})}+\frac{x^{-c}}{x^{-c}(1+x^{c-a}+x^{c-b})}+\frac{x^{-a}}{x^{-a}(1+x^{a-b}+x^{a-c})}$

$=\frac{x^{-b}}{x^{-b}+x^{-c}+x^{-a}}+\frac{x^{-c}}{x^{-c}+x^{-a}+x^{-b}}+\frac{x^{-a}}{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}$

$=\frac{x^{-b}+x^{-c}+x^{-a}}{x^{-a}+x^{-b}+x^{-c}}$

$=1=$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{1+Q+P^{-1}}+\frac{1}{1+R+Q^{-1}}+\frac{1}{1+P+R^{-1}}=1$ [প্রমাণিত]

(গ) প্রমাণ করো যে, $(c+a)\log(PQ)+(a+b)\log(QR)+(b+c)\log(PR)=0$

বামপক্ষ $=(c+a)\log(PQ)+(a+b)\log(QR)+(b+c)\log(PR)$

$=(c+a)\log(x^{a-b}.x^{b-c})+(a+b)\log(x^{b-c}.x^{c-a})+(b+c)\log(x^{a-b}.x^{c-a})$

$=(c+a)\log(x^{a-b+b-c})+(a+b)\log(x^{b-c+c-a})+(b+c)\log(x^{a-b+c-a})$

$=\log(x^{(a-c)(a+c)})+\log(x^{(b-a)(b+a)})+\log(x^{(c-b)(c+b)})$

$=\log(x^{a^2-c^2}.x^{b^2-a^2}.x^{c^2-b^2})$

$=\log(x^{a^2-c^2+b^2-a^2+c^2-b^2})$

$=logx^0$

$=\log 1 \quad [\because \boldsymbol{x^0=1}]$

$=0 \quad [\because \boldsymbol{log\,1=0}]$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \boldsymbol{(c+a)\,log(PQ)+(a+b)\,log(QR)+(b+c)\,log(PR)=0}$ (প্রমাণিত)

$A = 1.\dot{1}0\dot{3}, B = (1-2x)^5$ এবং $C = \left(3 - \frac{x^2}{4}\right)^2$ [ঢা. বো. '১৯]

(ক) প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে $B$ কে বিস্তৃত করো।

(খ) অসীম গুণোত্তর ধারার সূত্র প্রয়োগ করে $A$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ করো।

(গ) $C$ কে পঞ্চম পদ পর্যন্ত বিস্তৃত করে তার সাহায্যে $(2.99)^7$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করো।

## উত্তর



(ক) প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে $B$ কে বিস্তৃত করো।

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে -

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

$\therefore (1-2x)^5 = 1 + 5(-2x) + 10(-2x)^2 + 10(-2x)^3 + 5(-2)^4 + 1(-2)^5$

$= \mathbf{1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5}$

(খ) অসীম গুণোত্তর ধারার সূত্র প্রয়োগ করে $A$ কে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ করো।

দেওয়া আছে,

$$A = 1.\dot{1}0\dot{3}$$
$$= 1.103103103 \ldots \ldots \ldots$$
$$= 1 + (0.103 + 0.000103 + 0.000000103 + \cdots \ldots)$$

এখানে, বন্ধনীর অভ্যন্তরের ধারাটি একটি অসীম গুণোত্তর ধারা যার ১ম পদ, $a = 0.103$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{0.000103}{0.103} = 0.001 < 1$

$$\therefore 1.\dot{1}0\dot{3} = 1 + \frac{a}{1-r} = 1 + \frac{0.103}{1-0.001}$$
$$= 1 + \frac{0.103}{0.999} = 1 + \frac{103}{999} = \frac{999+103}{999} = \frac{1102}{999}$$

**নির্ণেয় মূলদীয় ভগ্নাংশ $\frac{1102}{999}$**

(গ) $C$ কে পঞ্চম পদ পর্যন্ত বিস্তৃত করে তার সাহায্যে $(2.99)^7$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $C = \left(3 - \frac{x^2}{4}\right)^2$

$= 3^7 + \binom{7}{1}3^6\left(-\frac{x^2}{4}\right) + \binom{7}{2}3^5\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2 + \binom{7}{3}3^4\left(-\frac{x^2}{4}\right)^3 + \binom{7}{4}3^3\left(-\frac{x^2}{4}\right)^4 + \dots\dots\dots$

$= 2187 + 7.729\left(-\frac{x^2}{4}\right) + \frac{7.6}{1.2}.243.\frac{x^4}{16} + \frac{7.6.5}{1.2.3}.81\left(-\frac{x^6}{64}\right) + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}.27.\frac{x^8}{256} + \dots\dots\dots$

$= 2187 - \frac{5103}{4}x^2 + \frac{5103}{16}x^4 - \frac{2835}{64}x^6 + \frac{945}{256}x^8 + \dots\dots\dots$

এখন, $3 - \frac{x^2}{4} = 2.99$

বা, $\frac{x^2}{4} = 3 - 2.99 = 0.01$

বা, $x^2 = 0.04$

$\therefore x = 0.2$

এখন $x = 0.2$ বসিয়ে পাই,

$C = \left\{3 - \frac{(0.2)^2}{4}\right\}^7 = 2187 - \frac{5103}{4}(0.2)^2 + \frac{5103}{16}(0.2)^4 - \frac{2835}{64}(0.2)^6 + \frac{945}{256}(0.2)^8 - \dots\dots\dots$

বা $(2.99)^7 = 2136.4775$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান)

**নির্ণেয় মান $2136.4775$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান)**

# স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

$A(6,12), B(2,-3), C(6,-3)$ এবং $D(10,12)$ একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু।

[ঢা. বো. ১৯]

(ক) $P(-3,4)$ ও $Q(-4,2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর।

(খ) $A, B, C$ ও $D$ বিন্দু চারটি দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজ আয়ত না সামান্তরিক তা নির্ণয় কর।

(গ) $ABCD$ চতুর্ভুজের যে অংশ ১ম চতুর্ভাগে অবস্থান করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

## উত্তর

(ক) $P(-3,4)$ ও $Q(-4,2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর।

$P(-3,4), Q(-4,2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী রেখার ঢাল $= \frac{2-4}{-4-(-3)}$

$= \frac{-2}{-4+3}$

$= \frac{-2}{-1}$

$= \mathbf{2}$ (Ans)

(খ) $A, B, C$ ও $D$ বিন্দু চারটি দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজ আয়ত না সামান্তরিক তা নির্ণয় কর।

$A(6,12)$ ও $D(10,12)$ বিন্দু দুইটি প্রথম চতুর্ভাগে এবং
$B(2,-3)$ ও $C(6,-3)$ বিন্দু চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$AB$ বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6-2)^2 + (12+3)^2}$

$= \sqrt{4^2 + 15^2} = \sqrt{241}$

$BC$ বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2-6)^2 + (-3+3)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4$

$CD$ বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6-10)^2 + (-3-12)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (-15)^2} = \sqrt{241}$

$AD$ বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6-10)^2 + (12-12)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4$

এখানে, $AB$ বাহুর দৈর্ঘ্য $= CD$ বাহুর দৈর্ঘ্য
এবং, $BC$ বাহুর দৈর্ঘ্য $= AD$ বাহুর দৈর্ঘ্য

এখন কর্ণ $\mathrm{AC} = \sqrt{(6-6)^2 + (12+3)^2}$

$= \sqrt{0^2 + 15^2} = 15$

কর্ণ $\mathrm{BD} = \sqrt{(2-10)^2 + (-3-12)^2}$

$= \sqrt{(-8)^2 + (-15)^2} = 17$

কর্ণ $\mathrm{AC} \neq$ কর্ণ $\mathrm{BD}$

$\therefore$ কর্ণদ্বয় সমান নয়।

$\therefore$ চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান কিন্তু কর্ণদ্বয় সমান নয়।

$\therefore$ চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। (Ans)

(গ) $ABCD$ চতুর্ভুজের যে অংশ ১ম চতুর্ভাগে অবস্থান করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

AB সরলরেখার সমীকরণ,

$$\frac{x-6}{6-2}=\frac{y-12}{12+3}$$

বা, $\frac{x-6}{4}=\frac{y-12}{15}$

বা, $15x-90=4y-48$

$\therefore 15x-4y=42 \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$

আবার, CD সরলরেখার সমীকরণ,

$$\frac{x-10}{10-6}=\frac{y-12}{12+3}$$

বা, $\frac{x-10}{4}=\frac{y-12}{15}$

বা, $15x-150=4y-48$

$\therefore 15x-4y=102 \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$

এখন, কোনো সরলরেখা x অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দুর $y$ স্থানাঙ্ক শূন্য।

অর্থাৎ, $y=0$ এই মান $(i)$ নং এ বসিয়ে,

$$15x-4.0=42$$

$\therefore x=\frac{42}{15}$

$(i)$ নং রেখা $x$ অক্ষকে $(\frac{42}{15},0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, $y=0$ এই মান $(ii)$ নং এ বসিয়ে,

$$15x-4.0=102$$

$\therefore x=\frac{102}{15}$

$(ii)$ নং রেখা $x$ অক্ষকে $(\frac{102}{15},0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে করি, $E(\frac{42}{15},0)$ এবং $F(\frac{102}{15},0)$

তাহলে, ABCD চতুর্ভুজের যে অংশ প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করে তা হবে $A, E, F, D$ বিন্দু দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজ।

$\therefore$চতুর্ভুজ AEFD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & \frac{42}{15} & \frac{102}{15} & 10 & 6 \\ 12 & 0 & 0 & 12 & 12 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left(0 + 0 + \frac{408}{5} + 120 - \frac{168}{5} - 0 - 0 - 72\right)$

$= \frac{1}{2} \times 96$ বর্গ একক

$= 48$ বর্গ একক (Ans)

$\Delta PQR$ এর ভূমি $a = 5.3$ সে.মি., ভূমি সংলগ্ন কোণ $x = 40°$, অপর দুই বাহুর অন্তর $d = 2$ সে.মি., $PQ$ ও $PR$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $M$ ও $N$. [ঢা. বো. '১৯]

(ক) $100\pi$ বর্গ সে.মি. পৃষ্ঠতলবিশিষ্ট গোলকের আয়তন নির্ণয় কর।

(খ) অঙ্কনের বিবরণসহ $PQR$ ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

(গ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MR$ ও $QN$ এর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা $MN$ ও $QR$ এর সমান্তরাল।

## উত্তর

(ক) $100\pi$ বর্গ সে. মি পৃষ্ঠতলবিশিষ্ট গোলকের আয়তন নির্ণয় করো।

ধরি, গোলকের ব্যাসার্ধ $= r$ সে. মি

$\therefore$ গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ সে. মি

শর্তমতে, $4\pi r^2 = 100\pi$

বা, $r^2 = 25$

$\therefore r = 5$

গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$

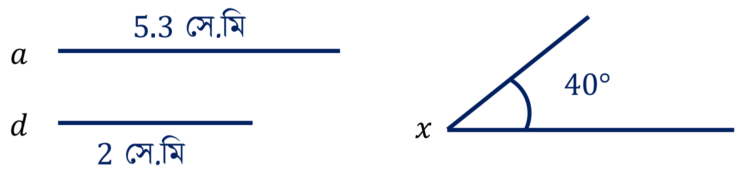
$= \frac{4}{3} \times 3.1416 \times 5^3$ ঘন সে. মি

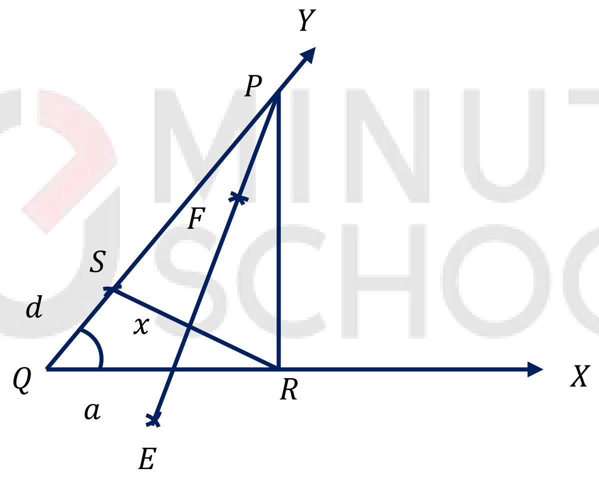
$= \frac{4 \times 3.1416 \times 125}{3} = 523.6$ ঘন সে. মি

**নির্ণেয় আয়তন $= 523.6$ ঘন সে. মি**

(খ) অঙ্কনের বিবরণসহ $PQR$ ত্রিভুজটি অঙ্কন করো।

দেওয়া আছে, $\Delta PQR$ এর ভূমি $QR = a = 5.3$ সে. মি.। ভূমি সংলগ্ন কোণ $x = 40°$ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর $d = 2$ সে. মি. অর্থাৎ $PQ - PR$ বা, $PR - PQ = 2$ সে. মি. ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।




**অঙ্কনঃ**

**ধাপ-১:** যেকোনো একটি রশ্মি $QX$ থেকে ভূমি $a$ এর সমান করে $QR$ রেখাংশ কেটে নেই।

**ধাপ-২:** $QR$ রেখাংশের $Q$ বিন্দুতে $\angle YQR = x$ আঁকি।

**ধাপ-৩:** $QY$ রেখা থেকে $QS = d$ কেটে নেই।

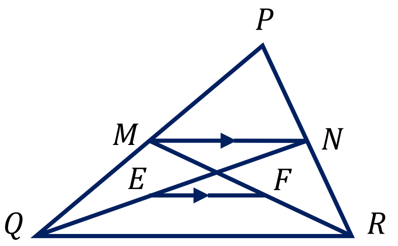
**ধাপ-৪:** $R, S$ যোগ করি।

**ধাপ-৫:** $RS$ এর ওপর $EF$ লম্ব দ্বিখন্ডক আঁকি যেন $QY$ কে $P$ বিন্দুতে ছেদ করে।

**ধাপ-৬:** $P, R$ যোগ করি।

**তাহলে, $PQR$ –ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।**

(গ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MR$ ও $QN$ এর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা $MN$ ও $QR$ এর সমান্তরাল।




**প্রমানঃ** দেওয়া আছে, $\Delta PQR$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $M$ ও $N$। $M$ ও $N$ যোগ করি। ফলে $QRNM$ একটি ট্রাপিজিয়াম উৎপন্ন হলো।

মনে করি, $QRNM$ ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় $MN$ ও $QR$ এবং $MR$ ও $QN$ কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $E$ ও $F$ । প্রমাণ করতে হবে যে, $EF \parallel MN \parallel QR$

মনে করি, $Q, R, N, M$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{q}, \underline{r}, \underline{n}$ ও $\underline{m}$

এখন, $E, QN$ এর মধ্যবিন্দু হওয়ায় $E$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}\left(\underline{q} + \underline{n}\right)$

$F, MR$ এর মধ্যবিন্দু হওয়ায় $F$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{m})$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{m}) - \frac{1}{2}\left(\underline{q} + \underline{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{r} + \underline{m} - \underline{q} - \underline{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{r} - \underline{q} + \underline{m} - \underline{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\underline{r} - \underline{q}\right) - (\underline{n} - \underline{m})\right\}$$

$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{MN})$  $[\because \boldsymbol{\overrightarrow{QR}} = \boldsymbol{\underline{r}} - \boldsymbol{\underline{q}}$ **এবং** $\boldsymbol{\overrightarrow{MN}} = \boldsymbol{\underline{n}} - \boldsymbol{\underline{m}}]$

এখন, $\overrightarrow{QR}$ এবং $\overrightarrow{MN}$ সমান্তরাল বলে $\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{MN}$ সমান্তরাল।

$\boldsymbol{EF \parallel MN \parallel QR}$ **(প্রমাণিত)**

# সম্ভাবনা

দুইটি ছক্কা একত্রে একবার নিক্ষেপ করা হলো এবং 11 থেকে 42 পর্যন্ত সংখ্যাযুক্ত কূপন টিকিট থেকে প্রথম পুরষ্কারের জন্য একটি টিকিট তোলা হলো। [ঢা. বো. ১৯]

(ক) একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হলে বিজোড় সংখ্যা অথবা তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা উঠার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

(খ) দুইটি ছক্কাতে প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 7 অপেক্ষা ছোট হওয়ার সম্ভাবনা কত।

(গ) প্রথম পুরষ্কারের জন্য তোলা টিকিটটি 2 এবং 5 এর গূণিতক সংখ্যাযুক্ত হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

## উত্তর

(ক) একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হলে বিজোড় সংখ্যা অথবা তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা উঠার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হলে নমুনাক্ষেত্রটি হবে : $\{1,2,3,4,5,6\}$

$\therefore$ মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা $= 6$ টি।

আবার, ছক্কাটি একবার নিক্ষেপ করা হলে বিজোড় সংখ্যা অথবা তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার অনুকূল ফলাফল $= 4$ টি

যথা : $1,3,5,6\}$

**এখন $P$ (ছক্কায় বিজোড় সংখ্যা অথবা তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা)** $= \frac{4}{6}$

$$= \frac{2}{3}$$

(খ) দুইটি ছক্কাতে প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 7 অপেক্ষা ছোট হওয়ার সম্ভাবনা কত।

দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে নমুনাক্ষেত্রটি হবে নিম্নরূপ :

| S | | ২য় ছক্কা | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| ১ম ছক্কা | 1 | $(1, 1)$ | $(1, 2)$ | $(1, 3)$ | $(1, 4)$ | $(1, 5)$ | $(1, 6)$ |
| | 2 | $(2, 1)$ | $(2, 2)$ | $(2, 3)$ | $(2, 4)$ | $(2, 5)$ | $(2, 6)$ |
| | 3 | $(3, 1)$ | $(3, 2)$ | $(3, 3)$ | $(3, 4)$ | $(3, 5)$ | $(3, 6)$ |
| | 4 | $(4, 1)$ | $(4, 2)$ | $(4, 3)$ | $(4, 4)$ | $(4, 5)$ | $(4, 6)$ |
| | 5 | $(5, 1)$ | $(5, 2)$ | $(5, 3)$ | $(5, 4)$ | $(5, 5)$ | $(5, 6)$ |
| | 6 | $(6, 1)$ | $(6, 2)$ | $(6, 3)$ | $(6, 4)$ | $(6, 5)$ | $(6, 6)$ |

$\therefore$ মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা $= 36$ টি

দুইটি ছক্কাতে প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 7 অপেক্ষা ছোট আসায় অনুকূল ফলাফল $= 15$ টি। যথা :

$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1)\}$

$\therefore$ **দুইটি ছক্কাতে প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 7 অপেক্ষা ছোট হওয়ার সম্ভাবনা** $= \mathbf{\frac{15}{36}}$

$$= \mathbf{\frac{5}{12}}$$

(গ) প্রথম পুরষ্কারের জন্য তোলা টিকিটটি 2 এবং 5 এর গুণিতক সংখ্যাযুক্ত হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

11 থেকে 42 পর্যন্ত সংখ্যাযুক্ত কূপন টিকিটগুলো : 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42

$\therefore$ মোট টিকিট $= 32$ টি

2 এবং 5 এর গুণিতক সংখ্যাযুক্ত হওয়ার অনুকূল ফলাফল $= 3$ টি।

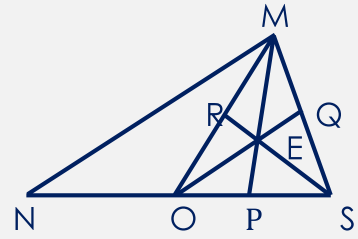
যথা : $20, 30, 40$

**$\therefore$ 2 এবং 5 এর গুণিতক সংখ্যাযুক্ত হওয়ার সম্ভাবনা** $= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{32}}$

# Rajshahi BOARD

## জ্যামিতি

নিচের চিত্রটি লক্ষ্য করো এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।




চিত্রে, $OS, MS, MO$ এবং $NS$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $P, Q, R$ ও $O$। [রা. বো. '১৯]

(ক) $PE = 3$ সে. মি. হলে $PM$ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(খ) প্রমাণ করো যে, $MO^2 + NO^2 = \frac{1}{2}(MN^2 + MS^2)$

(গ) $\Delta MOS$ হতে প্রমাণ করো যে, $3(ME^2 + OE^2 + SE^2) = MO^2 + MS^2 + SO^2$

## উত্তর

(ক) $PE = 3$ সে. মি. হলে $PM$ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

আমরা জানি, ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র মধ্যমাত্রয়কে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore ME : PE = 2 : 1$

বা, $\frac{ME}{PE} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{ME+PE}{PE} = \frac{2+1}{1}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{PM}{PE} = \frac{3}{1}$

বা, $PM = 3 \times 3$ সে. মি. $= 9$ সে. মি.

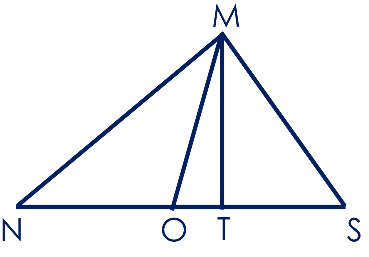
(খ) প্রমাণ করো যে, $MO^2 + NO^2 = \frac{1}{2}(MN^2 + MS^2)$

মনে করি, $\Delta MNS$ –এর মধ্যমা $MO$। প্রমাণ করতে হবে যে, $MO^2 + NO^2 = \frac{1}{2}(MN^2 + MS^2)$

**অঙ্কনঃ** $M$ থেকে $NS$ এর উপর $MT$ লম্ব আঁকি।

**প্রমাণঃ** $\Delta MNO$ এর $\angle MON$ স্থূলকোণ

এবং $NO$ এর বর্ধিতাংশের উপর $MO$ রেখার লম্ব অভিক্ষেপ $OT$




$\therefore MN^2 = MO^2 + NO^2 + 2NO.OT \ldots\ldots(i)$

আবার, $\Delta MOS$ এর $\angle MOS$ সূক্ষ্মকোণ

এবং $OS$ রেখার উপর $MO$ রেখার লম্ব অভিক্ষেপ $OT$

$\therefore MS^2 = MO^2 + SO^2 - 2SO.OT$

বা, $MS^2 = MO^2 + NO^2 - 2NO.OT$ $\quad [\because \boldsymbol{NO = SO}] \ldots\ldots(ii)$

সমীকরণ $(i)$ ও $(ii)$ যোগ করে পাই,

$$MN^2 + MS^2 = MO^2 + NO^2 + 2NO.OT + MO^2 + NO^2 - 2NO.OT$$

$\therefore MN^2 + MS^2 = 2MO^2 + 2NO^2 = 2(MO^2 + NO^2)$

$\therefore MO^2 + NO^2 = \frac{1}{2}(MN^2 + MS^2)$ **(প্রমাণিত)**

(গ) $\Delta MOS$ হতে প্রমাণ করো যে, $3(ME^2 + OE^2 + SE^2) = MO^2 + MS^2 + SO^2$

**বিশেষ নির্বচনঃ** মনে করি, $\Delta MOS$ এর মধ্যমাত্রাত্রয় $MP, OQ$ ও $SR$ পরস্পর $E$ বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $3(ME^2 + OE^2 + SE^2) = MO^2 + MS^2 + SO^2$

**প্রমাণঃ** মনে করি, $\Delta MOS$ এর $OS, SM$ ও $MO$ বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $a, b$ ও $c$ এবং মধ্যমা $MP, OQ$ ও $SR$ এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে

$d, e$ ও $f$। তাহলে এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য হতে পাই,

$$MO^2 + MS^2 = 2(MP^2 + OP^2)$$

বা, $c^2 + b^2 = 2\left(d^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2\right) \qquad \left[\because \boldsymbol{OP = \frac{1}{2}a}\right]$

বা, $b^2 + c^2 = 2d^2 + 2.\frac{1}{4}a^2$

বা, $b^2 + c^2 = 2d^2 + \frac{a^2}{2}$

বা, $d^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$

অনুরূপভাবে পাওয়া যায়,$e^2 = \frac{2(c^2+a^2)-b^2}{4}$ এবং

$f^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$

অতএব, $d^2 + e^2 + f^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} + \frac{2(c^2+a^2)-b^2}{4} + \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$

অর্থাৎ, $d^2 + e^2 + f^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

$\therefore 3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2)$

$\therefore 3(OS^2 + MS^2 + MO^2) = 4MP^2 + 4OQ^2 + 4SR^2 \dots\dots (i)$

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো ছেদ বিন্দুতে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত হয়।

$\therefore \frac{ME}{PE} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{PE}{ME} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{PE+ME}{ME} = \frac{1+2}{2}$ **[যোজন করে]**

বা, $\frac{MP}{ME} = \frac{3}{2}$

বা, $2MP = 3ME$

বা, $4MP^2 = 9ME^2$ **[বর্গ করে]**

অনুরূপে, $4OQ^2 = 9OE^2$ এবং $4SR^2 = 9SE^2$

সুতরাং $(i)$ নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$3(MO^2 + OS^2 + MS^2) = 9ME^2 + 9OE^2 + 9SE^2$$

বা, $3(MO^2 + OS^2 + MS^2) = 9(ME^2 + OE^2 + SE^2)$

$\therefore 3(ME^2 + OE^2 + SE^2) = MO^2 + MS^2 + SO^2$ **(প্রমাণিত)**

# ত্রিকোণমিতি

$x = acos\theta$ এবং $y = bsin\theta$ [রা. বো. '১৯]

(ক) $\frac{x}{y} = 1$ হলে, $\frac{asin\theta+bcos\theta}{asin\theta-bcos\theta}$ এর মান নির্ণয় করো।

(খ) $x - y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ হলে প্রমাণ করো যে, $asin\theta + bcos\theta - c = 0$.

(গ) $a = 3$ এবং $b = \sqrt{2}$ হলে $x + y^2 = 3$ সমীকরণটি সমাধান করো, যখন, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

## উত্তর

(ক) $\frac{x}{y} = 1$ হলে, $\frac{asin\theta+bcos\theta}{asin\theta-bcos\theta}$ এর মান নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $x = acos\theta$

এবং, $y = bsin\theta$

$\frac{x}{y} = 1$ হলে, $\frac{acos\theta}{bsin\theta} = 1$

বা, $\frac{acos\theta}{bsin\theta} \times \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$ [উভয়পক্ষে $\frac{b^2}{a^2}$ দ্বারা গুন করে]

বা, $\frac{bcos\theta}{asin\theta} = \frac{b^2}{a^2}$

বা, $\frac{asin\theta}{bcos\theta} = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $\frac{asin\theta+bcos\theta}{asin\theta-bcos\theta} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

$\therefore \frac{asin\theta+bcos\theta}{asin\theta-bcos\theta} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

**নির্ণেয় মান $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.**

(খ) $x - y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ হলে প্রমাণ করো যে, $asin\theta + bcos\theta - c = 0.$

দেওয়া আছে, $x = acos\theta$

এবং, $y = bsin\theta$

এখন, $x - y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

বা, $acos\theta - bsin\theta = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$

আমরা পাই,

$$(asin\theta + bcos\theta)^2 = a^2 \sin^2 \theta + 2absin\theta cos\theta + b^2 \cos^2 \theta$$

$$= a^2(1 - \cos^2 \theta) + 2absin\theta\, cos\theta + b^2(1 - \sin^2 \theta)$$

$$[\because \boldsymbol{\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta\, ; \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta}]$$

$$= a^2 + b^2 - (a^2 \cos^2 \theta - 2ab\, sin\theta\, cos\theta + b^2 \sin^2 \theta)$$

$$= a^2 + b^2 - (acos\theta - bsin\theta)^2$$

$$= a^2 + b^2 - \left(\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}\right)^2$$ **[মান বসিয়ে]**

$$= a^2 + b^2 - a^2 - b^2 + c^2 = c^2$$

বা, $(asin\theta + bcos\theta)^2 = c^2$

বা, $asin\theta + bcos\theta = c$ **[উভয়পক্ষকে বর্গমূল করে]**

$\therefore \boldsymbol{asin\theta + bcos\theta - c = 0}$ [প্রমাণিত]

(গ) $a = 3$ এবং $b = \sqrt{2}$ হলে $x + y^2 = 3$ সমীকরণটি সমাধান করো, যখন, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

দেওয়া আছে, $a = 3$ এবং $b = \sqrt{2}$

$\therefore x = acos\theta = 3cos\theta$

এবং $y = bsin\theta = \sqrt{2}sin\theta$

এখন, $x + y^2 = 3$

বা, $3cos\theta + \left(\sqrt{2}sin\theta\right)^2 = 3$

বা, $3cos\theta + 2\sin^2\theta = 3$

বা, $3cos\theta + 2(1 - \cos^2\theta) = 3$

বা, $3cos\theta + 2 - 2\cos^2\theta = 3$

বা, $-2\cos^2\theta + 3cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 3cos\theta + 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 2cos\theta - cos\theta + 1 = 0$

বা, $2cos\theta(cos\theta - 1) - 1(cos\theta - 1) = 0$

বা, $(2cos\theta - 1)(cos\theta - 1) = 0$

হয়, $2cos\theta - 1 = 0$

বা, $2cos\theta = 1$

বা, $cos\theta = \frac{1}{2}$

অথবা, $cos\theta - 1 = 0$

বা, $cos\theta = 1$

$cos\theta = \frac{1}{2}$ হলে, $cos\theta = \frac{1}{2} = cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ যা গ্রহণযোগ্য কারন $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = cos\frac{5\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{5\pi}{3}$ যা গ্রহণযোগ্য কারন $0 \leq \theta \leq 2\pi$

আবার, $cos\theta = 1$ হলে,

$$cos\theta = 1 = \cos 0$$

$\therefore \theta = 0$ যা গ্রহণযোগ্য কারন $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$cos\theta = 1 = \cos(2\pi - 0) = cos2\pi$$

$\therefore \theta = 2\pi$ যা গ্রহণযোগ্য কারন $0 \leq \theta \leq 2\pi$

**নির্ণেয় সমাধান,** $\boldsymbol{\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi}$

# সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন

$A=\frac{1}{y^q+y^{-r}+1}+\frac{1}{y^r+y^{-p}+1}+\frac{1}{y^p+y^{-q}+1}$

এবং $\log_e(3+x)=2\log_e x$ [রা. বো. '১৯]

(ক) $\log_{\sqrt{27}} m=3\frac{1}{3}$ হলে, $m$ –এর মান নির্ণয় করো।

(খ) $p+q+r=0$ হলে প্রমাণ করো যে, $A=1$

(গ) ২য় সমীকরণ হতে প্রমাণ করো যে, $x=\frac{\sqrt{13}+1}{2}$



## উত্তর

(ক) $\log_{\sqrt{27}} m=3\frac{1}{3}$ হলে, $m$ –এর মান নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে,

$$\log_{\sqrt{27}} m=3\frac{1}{3}$$

বা, $\log_{\sqrt{27}} m=\frac{10}{3}$

বা, $m=\left(\sqrt{27}\right)^{\frac{10}{3}}=\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{10}{3}}=3^5=243$

$\therefore \boldsymbol{m=243}$ (*Ans*)

(খ) $p+q+r=0$ হলে প্রমাণ করো যে, $A=1$

দেওয়া আছে,

$$A=\frac{1}{y^q+y^{-r}+1}+\frac{1}{y^r+y^{-p}+1}+\frac{1}{y^p+y^{-q}+1}$$

$$=\frac{1}{y^q+\frac{1}{y^r}+1}+\frac{1}{y^r+y^{-p}+1}+\frac{1}{y^p+y^{-q}+1}$$

$$=\frac{y^r}{1+y^r+y^{q+r}}+\frac{1}{1+y^r+y^{q+r}}+\frac{1}{y^p+\frac{1}{y^q}+1} \qquad [\because \boldsymbol{p+q+r=0, \therefore q+r=-p}]$$

$$=\frac{y^r}{1+y^r+y^{q+r}}+\frac{1}{1+y^r+y^{q+r}}+\frac{y^q}{y^{p+q}+y^q+1}$$

$$=\frac{y^r}{1+y^r+y^{q+r}}+\frac{1}{1+y^r+y^{q+r}}+\frac{y^q}{y^{-r}+y^q+1}$$

$$=\frac{y^r}{1+y^r+y^{q+r}}+\frac{1}{1+y^r+y^{q+r}}+\frac{y^q}{\frac{1}{y^r}+y^q+1}$$

$$=\frac{y^r}{1+y^r+y^{q+r}}+\frac{1}{1+y^r+y^{q+r}}+\frac{y^q.y^r}{1+y^r+y^{q+r}}$$

$$=\frac{y^r+1+y^{q+r}}{1+y^r+y^{q+r}}=\frac{1+y^r+y^{q+r}}{1+y^r+y^{q+r}}=1$$

$\therefore \boldsymbol{A=1}$ (প্রমাণিত)

(গ) ২য় সমীকরণ হতে প্রমাণ করো যে, $x = \frac{\sqrt{13}+1}{2}$

দেওয়া আছে,

$$\log_e(3+x) = 2\log_e x$$

বা, $\log_e(3+x) = \log_e x^2$

বা, $3 + x = x^2$

বা, $x^2 - x - 3 = 0$

বা, $x^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4}$

বা, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$

বা, $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ **[ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম অসংজ্ঞায়িত]**

বা, $x = \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{1}{2}$

$\boldsymbol{x = \frac{\sqrt{13}+1}{2}}$ (প্রমাণিত)

# দ্বিপদী বিস্তৃতি

$A = \left(a - \frac{1}{3x}\right)^7$ এবং $B = \left(3 - \frac{1}{2x}\right)^6$ দুইটি দ্বিপদী রাশি। [রা. বো. '১৯]

(ক) $(1-3x^2)^4$ কে প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃত করো।

(খ) $A$ –এর বিস্তৃতিতে $x^2$ এর সহগ $x^4$ এর সহগের 135 গুন হলে $a$ এর মান নির্ণয় করো।

(গ) $B$ কে বিস্তৃত করে উহার সাহায্যে $(2.995)^6$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করো।



## উত্তর

(ক) $(1-3x^2)^4$ কে প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে বিস্তৃত করো।

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$$\therefore (1-3x^2)^4 = 1 + 4(-3x^2) + 6(-3x^2) + 6(-3x^2)^2 + 4(-3x^2)^3 + (-3x^2)^4$$
$$= 1 - 12x^2 + 54x^4 - 108x^6 + 81x^8$$

**নির্ণেয় বিস্তৃতি: $\mathbf{1 - 12x^2 + 54x^4 - 108x^6 + 81x^8}$**

(খ) $A$ –এর বিস্তৃতিতে $x^2$ এর সহগ $x^4$ এর সহগের 135 গুন হলে $a$ এর মান নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $A = \left(a - \frac{1}{3^x}\right)^7$

দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে, $A = \left(a - \frac{1}{3^x}\right)^7$

$= a^7 + {}^7C_1 a^{7-1}\left(\frac{1}{-3}x\right) + {}^7C_2 a^{7-2}\left(\frac{1}{-3}x\right)^2 + {}^7C_3 a^{7-3} a^{7-3}\left(\frac{1}{-3}x\right)^3 + {}^7C_4 a^{7-4}\left(\frac{1}{-3}x\right)^4 +$
$\dots\dots\dots$

$= a^7 + 7a^6\left(-\frac{1}{3}x\right) + \frac{7.6}{1.2}a^5.\frac{1}{9}x^2 + \frac{7.6.5}{1.2.3}a^4\left(-\frac{1}{27}x^3\right) + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}a^3.\frac{1}{81}x^4 + \dots\dots\dots$

$= a^7 - \frac{7}{3}a^6 x + \frac{7}{3}a^5 \mathrm{x}^2 - \frac{35}{27}\mathrm{a}^4\mathrm{x}^3 + \frac{35}{81}\mathrm{a}^3\mathrm{x}^4 + \dots\dots\dots$

প্রশ্নমতে, $\frac{7}{3}a^5 = 135 \times \frac{35}{81}a^3$

বা, $\frac{7}{3}a^2 = \frac{175}{3}$

বা, $7a^2 = 175$

বা, $a^2 = \frac{175}{7} = 25$

$\therefore a = \pm 5$

**নির্ণেয় মান $\pm 5$.**

(গ) $B$ কে বিস্তৃত করে উহার সাহায্যে $(2.995)^6$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $B = \left(3 - \frac{1}{2^x}\right)^6$

দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে,

$$B = \left(3 - \frac{1}{2^x}\right)^6$$

$$= 3^6 + {}^6C_1 3^{6-1}\left(-\frac{1}{2}x\right) + {}^6C_2 3^{6-2}\left(-\frac{1}{2}x\right)^2 + {}^6C_3 3^{6-3}\left(-\frac{1}{2}x\right)^3 + {}^6C_4 3^{6-4}\left(-\frac{1}{2}x\right)^4 +$$

$${}^6C_5 3^{-5}\left(-\frac{1}{2}x\right)^5 + \left(-\frac{1}{2}x\right)^6$$

$$= 729 + 6.3^5\left(-\frac{1}{2}x\right) + \frac{6.5}{1.2}.3^4.\frac{1}{4}x^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}3^3\left(-\frac{1}{8}x^3\right) + \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}3^2.\frac{1}{16}x^4 +$$

$$\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}3^1\left(-\frac{1}{32}x^5\right) + \frac{1}{64}x^6$$

$$= 729 - 729x + \frac{1215}{4}x^2 - \frac{135}{2}x^3 + \frac{135}{16}x^4 - \frac{9}{16}x^5 + \frac{1}{64}x^6$$

এখানে, $\left(3 - \frac{1}{2}x\right)^6 = (2.996)^6$ হলে,

$$3 - \frac{1}{2}x = 2.995$$

বা, $\frac{1}{2}x = 3 - 2.995 = 0.005$

বা, $x = 0.01$

উক্ত বিস্তৃতিতে $x = 0.01$ বসিয়ে পাই,

$$\left(3 - \frac{1}{2} \times 0.01\right)^6 = 729 - 729 \times 0.01 + \frac{1215}{4} \times (0.01)^2 - 135 \times (0.01)^3 + \frac{135}{16} \times (0.01)^4 -$$

$$\frac{9}{16} \times (0.01)^5 + \frac{1}{64} \times (0.01)^6$$

বা, $(2.995)^6 = 721.7403$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত)

**নির্ণেয় মান 721.7403 (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত)**

# সম্ভাবনা

একটি ঝুড়িতে $(5x+1)$ টি ফজলি, $(8x+3)$ টি হিমসাগর ও $(10x+7)$ টি আম্রপালি আম আছে। দৈবভাবে একটি আম নেয়া হলো। **[ রাজশাহী বোর্ড – ২০১৯ ]**

(ক) আমটি আম্রপালি হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ হলে $x$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $x = 2$ হলে আমটি ফজলি কিন্তু হিমসাগর না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

(গ) $x = 3$ হলে প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পর পর তিনটি আম তুলে নেয়া হলে সবগুলো আম আম্রপালি হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

## উত্তর

(ক) আমটি আম্রপালি হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ হলে $x$ এর মান নির্ণয় কর।

ঝুড়িতে ফজলি আম $= 5x + 1$

" হিমসাগর " $= 8x + 3$

" আম্রপালি " $= 10x + 7$

∴ঝুড়িতে মোট আম $= 23x + 11$

∴ আমটি আম্রপালি হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{10x+7}{23x+11}$

শর্তমতে, $\frac{10x+7}{23x+11} = \frac{1}{2}$

বা, $23x + 11 = 20x + 14$

বা, $23x - 20x = 14 - 11$

বা, $3x = 3$

$\therefore x = 1$

**∴ নির্ণেয় $x$ এর মান 1**

(খ) $x = 2$ হলে আমটি ফজলি কিন্তু হিমসাগর না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

$x = 2$ হলে, ঝুড়িতে ফজলি আম $= 5x + 1 = 5 \times 2 + 1 = 11$ টি

$x = 2$ হলে, ঝুড়িতে হিমসাগর আম $= 8x + 3 = 8 \times 2 + 2 = 19$ টি

$x = 2$ হলে, ঝুড়িতে আম্রপালি আম $= 10x + 7 = 10 \times 2 + 7 = 27$ টি

$\therefore$ ঝুড়িতে মোট আম $= (11 + 19 + 27)$ টি $= 57$ টি

আমটি ফজলি হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{11}{57}$

আমটি হিমসাগর হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{19}{57}$

$\therefore$ আমটি হিমসাগর না হওয়ার সম্ভাবনা $= (1 - \frac{19}{57})$

$= \frac{57-19}{57}$

$= \frac{38}{57}$

সুতরাং, $P$ (আমটি ফজলি কিন্তু হিমসাগর না হওয়ার) $= \frac{11}{57} \times \frac{38}{57}$

$= \frac{418}{3249}$

$\therefore$ **নির্ণেয় সম্ভাবনা** $\frac{418}{3249}$

(গ) $x = 3$ হলে প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পর পর তিনটি আম তুলে নেয়া হলে সবগুলো আম আম্রপালি হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

$x = 3$ হলে, ঝুড়িতে ফজলি আম $= 5x + 1 = 5 \times 3 + 1 = 16$ টি

$x = 3$ হলে, ঝুড়িতে হিমসাগর আম $= 8x + 3 = 8 \times 3 + 2 = 27$ টি

$x = 3$ হলে, ঝুড়িতে আম্রপালি আম $= 10x + 7 = 10 \times 3 + 7 = 37$ টি

$\therefore$ ঝুড়িতে মোট আম $= (16 + 27 + 37)$ টি $= 80$ টি

প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পর পর তিনটি আম তুলে নেয়া হলে সবগুলো (তিনটি) আম আম্রপালি হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{37}{80} \times \frac{36}{79} \times \frac{35}{78} = \mathbf{\frac{777}{8216}}$

# Comilla BOARD

## বীজগাণিতিক রাশি

$P(x) = 18x^3 - 15x^2 - x + 2$ [কু. বো. '১৯]

(ক) দেখাও যে, $3x+1, P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

(খ) $P(x)$ কে $(x-m)$ এবং $(x-n)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে, যেখানে $m \neq n$ তবে দেখাও যে, $18m^2 + 18mn + 18n^2 - 15m - 15n - 1 = 0$.

(গ) $\frac{3x-2}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

### উত্তর

(ক) দেখাও যে, $3x+1, P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

দেওয়া আছে, $P(x) = 18x^3 - 15x^2 - x + 2$

$3x + 1 = 3\{x - \left(-\frac{1}{3}\right)\}, P(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে যদি $P\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$ হয়।

এখন, $P\left(-\frac{1}{3}\right) = 18\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 15.(-\frac{1}{3})^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 2$

$$= -\frac{18}{27} - \frac{15}{9} + \frac{1}{3} + 2$$

$$= -\frac{2}{3} - \frac{5}{3} + \frac{1}{3} + 2$$

$$= \frac{-2-5+1+6}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

$\therefore$ **$3x+1, P(x)$ এর একটি উৎপাদক।**

(খ) $P(x)$ কে $(x-m)$ এবং $(x-n)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে, যেখানে $m \neq n$ তবে দেখাও যে, $18m^2 + 18mn + 18n^2 - 15m - 15n - 1 = 0$.

দেওয়া আছে,

$$P(x) = 18x^3 - 15x^2 - x + 2$$

$P(x)$ কে $(x-m)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ,

$$P(m) = 18m^3 - 15m^2 - m + 2$$

$P(x)$ কে $(x-n)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ,

$$P(n) = 18n^3 - 15n^2 - n + 2$$

শর্তমতে, $P(m) = P(n)$

বা, $18m^3 - 15m^2 - m + 2 = 18n^3 - 15n^2 - n + 2$

বা, $18m^3 - 15m^2 - m + 2 - 18n^3 + 15n^2 + n - 2 = 0$

বা, $18(m^3 - n^3) - 15(m^2 - n^2) - 1(m-n) = 0$

বা, $18(m-n)(m^2 + mn + n^2) - 15(m+n)(m-n) - 1(m-n) = 0$

বা, $(m-n)(18m^2 + 18mn + 18n^2 - 15m - 15n - 1) = 0$

$\therefore \mathbf{18m^2 + 18mn + 18n^2 - 15m - 15n - 1 = 0}$ $\quad [\because \boldsymbol{m \neq n}]$

**[দেখানো হলো]**

(গ) $\frac{3x-2}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

দেওয়া আছে,

$$P(x) = 18x^3 - 15x^2 - x + 2$$
$$= 18x^3 + 6x^2 - 21x^2 - 7x + 6x + 2$$
$$= 6x^2(3x+1) - 7x(3x+1) + 2(3x+1)$$
$$= (3x+1)(6x^2 - 7x + 2)$$
$$= (3x+1)(6x^2 - 3x - 4x + 2)$$
$$= (3x+1)\{3x(2x-1) - 2(2x-1)\}$$
$$= (3x+1)(2x-1)(3x-2)$$

এখন $\frac{3x-2}{P(x)} = \frac{(3x-2)}{(3x+1)(2x-1)(3x-2)}$

$= \frac{1}{(3x+1)(2x-1)}$

ধরি, $\frac{1}{(3x+1)(2x-1)} \equiv \frac{A}{(3x+1)} + \frac{B}{(2x-1)}$..................(1)

(1) নং এর উভয়পক্ষকে $(3x+1)(2x+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$1 \equiv A(2x-1) + B(3x+1)$..............(2)

(2) নং এ $x = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$1 = A(2.\tfrac{1}{2} - 1) + B(3.\tfrac{1}{2} + 1)$$

বা, $1 = 0 + B(\frac{3+2}{2})$

বা, $B.\frac{5}{2} = 1$

$\therefore\ B = \frac{2}{5}$

আবার, (2) নং এ $x = -\frac{1}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$1 = A\{2.(-\tfrac{1}{3}) - 1\} + B\{3.(-\tfrac{1}{3}) + 1\}$$

বা, $1 = A(\frac{-2-3}{3}) + 0$

বা, $A\left(\frac{-5}{3}\right) = 1$

$\therefore A = \frac{-3}{5}$

এখন, (1) নং এ $A$ ও $B$ এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{(3x+1)(2x-1)} \equiv \frac{\frac{-3}{5}}{(3x+1)} + \frac{\frac{2}{5}}{(2x-1)}$$

$$= -\frac{3}{5(3x+1)} + \frac{2}{5(2x-1)}$$

$$= \frac{2}{5(2x-1)} - \frac{3}{5(3x+1)}$$

$\therefore \frac{3x-2}{P(x)} = \frac{2}{5(2x-1)} - \frac{3}{5(3x+1)}$ **যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।**

# অসীম ধারা

$1 + (4x-1)^{-1} + (4x-1)^{-2} + (4x-1)^{-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

[ কুমিল্লা বোর্ড – ২০১৯ ]

(ক) $x = 1$ এর জন্য প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

(খ) $x = 2$ এর জন্য প্রাপ্ত ধারাটির প্রথম 20 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) x এর উপর কি শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

## উত্তর

(ক) $x = 1$ এর জন্য প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $\mathrm{r} = \frac{(4x-1)^{-1}}{1}$

$= (4x-1)^{-1}$

$= \frac{1}{4x-1}$

$x = 1$ হলে, $\mathrm{r} = \frac{1}{4.1-1}$

$= \frac{1}{3}$ (Ans)

(খ) $x = 2$ এর জন্য প্রাপ্ত ধারাটির প্রথম 20 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

$x = 2$ হলে ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $\mathrm{r} = \frac{1}{4.2-1} = \frac{1}{7}$

এবং ১ম পদ, $a = 1$

$\therefore$ ধারাটির ১ম 20 টি পদের সমষ্টি $= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$= \frac{1\{1-\left(\frac{1}{7}\right)^{20}\}}{1-\frac{1}{7}}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{7^{20}}}{\frac{6}{7}}$$

$$= \frac{7}{6}\left(1 - \frac{1}{7^{20}}\right)$$ (Ans)

(গ) x এর উপর কি শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি ও কেবল যদি,

$|r| < 1$ হয়।

বা, $\left|\frac{1}{4x-1}\right| < 1$

বা, $|4x-1| > 1$

অর্থাৎ, $4x - 1 > 1$

বা, $4x > 2$

$\therefore x > \frac{1}{2}$

অথবা, $-(4x-1) > 1$

বা, $4x - 1 < -1$

$\therefore x < 0$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত : $x > \frac{1}{2}$ অথবা $x < 0$ (Ans)

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{1}{1-\frac{1}{4x-1}}$

$= \frac{1}{\frac{4x-1-1}{4x-1}}$

$= \frac{4x-1}{4x-2}$ (Ans)

# ত্রিকোণমিতি

$X = \frac{cotA+cosecA-1}{cotA-cosecA+1}$ এবং $Y = cotA - cosecA$ [ কুমিল্লা বোর্ড - ২০১৯ ]

(ক) $A = \frac{2\pi}{3}$ হলে $Y$ এর মান নির্ণয় করো।

(খ) প্রমাণ করো যে, $XY = -1$.

(গ) $Y = (\sqrt{3})^{-1}$ এবং $0 \leq A \leq 2\pi$ হলে $A$ এর মান নির্ণয় করো।

## উত্তর



(ক) $A = \frac{2\pi}{3}$ হলে $Y$ এর মান নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $Y = cotA - cosecA$

$A = \frac{2\pi}{3}$ হলে, $Y = cot\frac{2\pi}{3} - cosec\frac{2\pi}{3}$

$$= \cot\left(\pi = \frac{\pi}{3}\right) - cosec\left(\pi = \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cot\frac{\pi}{3} - cosec\frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-1-2}{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

$\therefore Y = -\sqrt{3}$

**নির্ণেয় $Y$ এর মান $-\sqrt{3}$**

(খ) প্রমাণ করো যে, $XY = -1.$

দেওয়া আছে, $X = \frac{cotA+cosecA-1}{cotA-cosecA+1}$

এবং, $Y = cotA - cosecA$

$$\therefore X = \frac{cotA+cosecA-1}{cotA-cosecA+1}$$

$$= \frac{(cotA+cosecA)-(cosec^2A-\cot^2 A)}{cotA-cosecA+1}$$

$$= \frac{(cotA+cosecA)-(cosecA+cotA)(cosecA-cotA)}{cotA-cosecA+1}$$

$$= \frac{(cotA+cosecA)-(1-cosecA+cotA)}{(1-cosecA+cotA)}$$

$$= cotA + cosecA$$

এখন, $XY = (cotA + cosecA)(cotA - cosecA)$

$= -(cosecA + cotA)(cosecA - cotA)$

$= -(cosec^2A - \cot^2 A)$ $\quad [\because \boldsymbol{cosec^2A - \cot^2 A = 1}]$

$\therefore \boldsymbol{XY = -1}$ **(প্রমাণিত)**

(গ) $Y = (\sqrt{3})^{-1}$ এবং $0 \le A \le 2\pi$ হলে $A$ এর মান নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $Y = cotA - cosecA$

এবং $Y = (\sqrt{3})^{-1}$

$\therefore cotA - cosecA = (\sqrt{3})^{-1}$

বা, $\frac{cosA}{sinA} - \frac{1}{sinA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{cosA-1}{\sin A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3}(cosA - 1) = sinA$

বা, $3(cosA - 1)^2 = \sin^2 A$ **[বর্গ করে]**

বা, $3(\cos^2 A - 2cosA + 1) = 1 - \cos^2 A$

বা, $3\cos^2 A - 6cosA + 3 - 1 + \cos^2 A = 0$

বা, $4\cos^2 A - 6cosA + 2 = 0$

বা, $2\cos^2 A - 3cosA + 1 = 0$

বা, $2\cos^2 A - 2cosA - cosA + 1 = 0$

বা, $2cosA(cosA - 1) - 1(cosA - 1) = 0$

বা, $(2cosA - 1)(cosA - 1) = 0$

হয়, $2cosA - 1 = 0$

বা, $2cosA = 1$

বা, $cosA = \frac{1}{2}$

অথবা, $cosA - 1 = 0$

বা, $cosA = 1$

$cosA = \frac{1}{2}$ হলে, $cosA = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore A = \frac{\pi}{3}$

$cosA = \frac{1}{2} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{3}$

$\therefore A = \frac{5\pi}{3}$

আবার, $cosA = \frac{1}{2}$ হলে,

$$cosA = 1 = cos0$$

$\therefore A = 0$

$cosA = 1 = \cos(2\pi - 0) = cos2\pi$

$\therefore A = 2\pi$

কিন্তু $A = 0, \frac{\pi}{3}, 2\pi$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না।

**নির্ণেয় মান: $A = \frac{5\pi}{3}$.**

# সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন

$A = 2\log_k x - \log_k(3+x)$, $B = 1 + \log_p qr$, $C = 1 + \log_q rp$, $D = 1 + \log_r pq$
[কু. বো. '১৯]

(খ) $A = 0$ হলে, দেখাও যে, $x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{13})$

(গ) প্রমাণ করো যে, $B^{-1} + C^{-1} + D^{-1} = 1$

## উত্তর

(খ) $A = 0$ হলে, দেখাও যে, $x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{13})$

$A = 0$ হলে, $2\log_k x - \log_k(3+x) = 0$

বা, $\log_k x^2 - \log_k(3+x) = 0$

বা, $\log_k \frac{x^2}{3+x} = 0$

বা, $\frac{x^2}{3+x} = k^0 = 1$

বা, $x^2 = 3 + x$

বা, $x^2 - x - 3 = 0$

বা, $x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4.1(-3)}}{2.1}$

$= \frac{1\pm\sqrt{1+12}}{2} = \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{13})$

যেহেতু ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম সংজ্ঞায়িত নয়।

$\therefore \boldsymbol{x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{13})}$ (দেখানো হলো)

(গ) প্রমাণ করো যে, $B^{-1} + C^{-1} + D^{-1} = 1$

দেওয়া আছে,

$$B = 1 + \log_p qr$$

বা, $B = \log_p p + \log_p qr$

বা, $B = \log_p pqr$

বা, $p^B = pqr$

বা, $p = (pqr)^{\frac{1}{B}} \ldots\ldots\ldots (i)$

অনুরূপভাবে, $q = (pqr)^{\frac{1}{C}} \ldots\ldots\ldots (ii)$

এবং, $r = (pqr)^{\frac{1}{D}} \ldots\ldots\ldots (iii)$

$(i) \times (ii) \times (iii)$ থেকে পাই,

$$pqr = (pqr)^{\frac{1}{B}} \times (pqr)^{\frac{1}{C}} \times (pqr)^{\frac{1}{D}}$$

বা, $(pqr)^1 = (pqr)^{\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}}$

বা, $\frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} = 1$

$\therefore \boldsymbol{B^{-1} + C^{-1} + D^{-1} = 1}$ (প্রমাণিত)

# স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

$P(3,4), Q(-4,2), R(6,-1)$ এবং $S(k,3)$ একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু এবং বিন্দু চারটি ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে অবস্থান করে। [ কুমিল্লা বোর্ড – ২০১৯ ]

(ক) $Q$ ও $R$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী রেখার ঢাল নির্ণয় কর।

(খ) $T(x,y)$ বিন্দুটি $Q$ ও $R$ বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী হলে প্রমাণ কর যে, $20x-6y=17$.

(গ) $PQRS$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $PQR$ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের তিনগুণ হলে $k$ এর মান নির্ণয় কর।

## উত্তর

(ক) $Q$ ও $R$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী রেখার ঢাল নির্ণয় কর।

$Q(-4,2), R(6,-1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী রেখার ঢাল $=\frac{-1-2}{6+4}$

$=-\frac{3}{10}$ (Ans)

(খ) $T(x, y)$ বিন্দুটি $Q$ ও $R$ বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী হলে প্রমাণ কর যে, $20x - 6y = 17$.

শর্তমতে, $\mathrm{TQ} = \mathrm{TR}$

বা, $\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y+1)^2}$

বা, $x^2 + 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 12x + 36 + y^2 + 2y + 1$

বা, $x^2 + 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 - x^2 + 12x - 36 - y^2 - 2y - 1 = 0$

বা, $20x - 6y - 17 = 0$

$\therefore 20x - 6y = 17$ **(প্রমাণিত)**

(গ) $PQRS$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $PQR$ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের তিনগুণ হলে $k$ এর মান নির্ণয় কর।

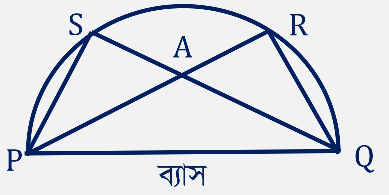
প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}(23 + 5k) = 3.\frac{41}{2}$

বা, $23 + 5\mathrm{k} = 123$

বা, $5\mathrm{k} = 100$

$\therefore \mathrm{k} = 20$ (Ans)

নিচের চিত্রটি লক্ষ কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :




চিত্রে PQ = 7 সে.মি. এবং PR = 6 সে.মি.   [ কুমিল্লা বোর্ড – ২০১৯ ]

(ক) PR এর সমান ব্যাসবিশিষ্ট একটি মার্বেলের আয়তন নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $PQ^2 = PR.PA + QS.QA$

(গ) $PR$ এর সমান বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম ষড়ভুজাকার প্রিজমের উচ্চতা $PQ$ এর সমান হলে এর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



## উত্তর

(ক) PR এর সমান ব্যাসবিশিষ্ট একটি মার্বেলের আয়তন নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, মার্বেলের ব্যাস, $2r = PR = 6$ সে.মি.

$\therefore$ মার্বেলের ব্যাসার্ধ, $r = 3$ সে.মি.

আমরা জানি, মার্বেলের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক

$= \frac{4}{3} \times 3.1416 \times (3)^3$ ঘন সে.মি.

$=$ **113.098 ঘন সে.মি.**   (Ans)

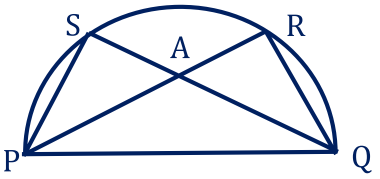
(খ) প্রমাণ কর যে, $PQ^2 = PR.PA + QS.QA$

**বিশেষ নির্বচন :** দেওয়া আছে, PQ ব্যাসের উপর PQRS একটি অর্ধবৃত্ত। PR ও QS জ্যাদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 = PR.PA + QS.QA$

**অঙ্কন :** S, R যোগ করি।

**প্রমাণ :** $\Delta RAS$ ও $\Delta PAQ$-এ




$\angle ASR = \angle APQ$ **[একই চাপ $PS$ এর উপর অবস্থিত]**

$\angle SAR = \angle PAQ$ **[বিপ্রতীপ কোণ বলে]**

এবং $\angle ARS = \angle PQA$ **[একই চাপ $QR$ এর উপর অবস্থিত]**

ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\frac{PA}{SA} = \frac{QA}{RA}$

বা, $PA.RA = QA.SA$

বা, $PA.RA + PA^2 = QA.SA + PA^2$ **[উভয়পক্ষে $PA^2$ যোগ করে]**

বা, $PA(RA + PA) = QA.SA + SA^2 + PS^2$ **[$PQ$ ব্যাস তাই $\angle PSA = \angle PSQ = 90°; \therefore PA^2 = PS^2 + SA^2$]**

বা, $PA.PR = SA(QA + SA) + PS^2$

বা, $PA.PR = SA.QS + PQ^2 - QS^2$ **[$\angle PSQ = 90°$ তাই $\Delta PQS$-এ $PQ^2 = PS^2 + QS^2$ বা, $PS^2 = PQ^2 - QS^2$]**

বা, $PA.PR = PQ^2 - QS(QS - SA)$

বা, $PA.PR = PQ^2 - QS.QA$

$\therefore PQ^2 = PR.PA + QS.QA$ **(প্রমাণিত)**

(গ) $PR$ এর সমান বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম ষড়ভুজাকার প্রিজমের উচ্চতা $PQ$ এর সমান হলে এর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, প্রিজমের ভূমি ষড়ভুজ যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি. এবং প্রিজমের উচ্চতা 7 সে.মি.

আমরা জানি, $n$ বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= n \times \frac{a^2}{4} \cot \frac{180°}{n}$ বর্গ একক

$\therefore$ প্রিজমটির ভূমির ক্ষেত্রফল $= 6 \times \frac{6^2}{4} \cot \frac{180°}{6}$ বর্গ সে.মি.

$= 54 \cot 30°$ বর্গ সে.মি.

$= 54\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.

এবং প্রিজমটির পরিসীমা $= 6 \times 6$ সে.মি.

$= 36$ সে.মি.

আমরা জানি, প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2$(ভূমির ক্ষেত্রফল) $+$ ভূমির পরিসীমা $\times$ উচ্চতা

$= (2 \times 54\sqrt{3}) + 36 \times 7$ বর্গ সে.মি.

$= 439.061$ বর্গ সে.মি. (Ans)

# সম্ভাবনা

অনিক ও মানিক দুই বন্ধু। অনিকের কাছে একটি নিরপেক্ষ ছক্কা এবং মানিকের কাছে একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা আছে। [ কুমিল্লা বোর্ড – ২০১৯ ]

(ক) অনিকের ছক্কাটি একবার নিক্ষেপ করা হলে বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

(খ) অনিকের ছক্কা ও মানিকের মুদ্রাটি একত্রে একবার নিক্ষেপ করা হলে, Probability Tree অঙ্কন করে নমুনাক্ষেত্র হতে ছক্কার জোড় সংখ্যা ও মুদ্রার হেড আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

(গ) মানিকের মুদ্রাটি তিনবার নিক্ষেপ করা হলে Probability Tree অঙ্কন করে নমুনাক্ষেত্র হতে কমপক্ষে একটি টেল পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।



## উত্তর

(ক) অনিকের ছক্কাটি একবার নিক্ষেপ করা হলে বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

অনিকের ছক্কাটি একবার নিক্ষেপ করলে নমুনাক্ষেত্রটি :

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ছক্কায় বিজোড় সংখ্যা আসার অনুকূল ফলাফল $= 3$ টি। যথা : $1, 3, 5$

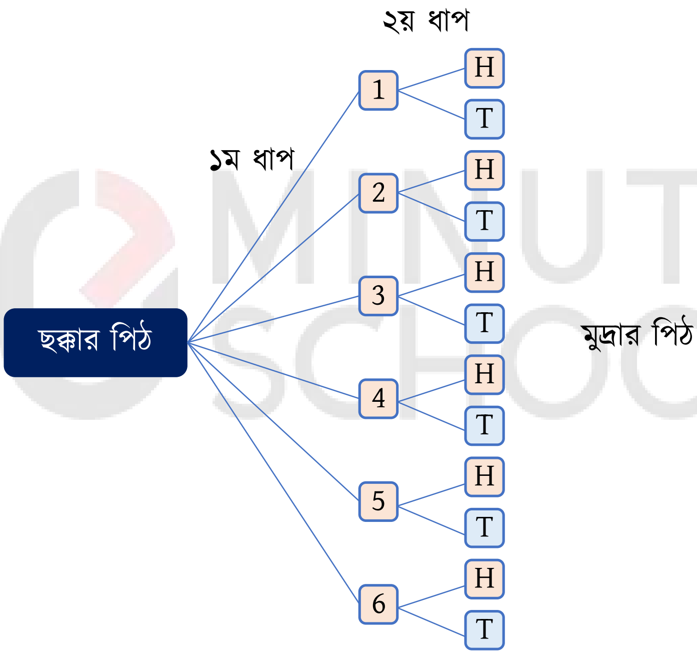
$\therefore$ ছক্কায় বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{6}$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

(খ) অনিকের ছক্কা ও মানিকের মুদ্রাটি একত্রে একবার নিক্ষেপ করা হলে, Probability Tree অঙ্কন করে নমুনাক্ষেত্র হতে ছক্কার জোড় সংখ্যা ও মুদ্রার হেড আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

প্রশ্নের শর্তানুসারে Probability Tree নিচে আঁকা হলো :

অনিকের ছক্কা নিক্ষেপ ও মানিকের মুদ্রা নিক্ষেপ পরিক্ষাকে দুই ধাপ হিসেবে বিবেচনা করি। প্রথম ধাপে ছক্কা নিক্ষেপে ছয়টি ফলাফল $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ আসতে পারে। দ্বিতীয় ধাপে মুদ্রা নিক্ষেপে দুইটি ফলাফল $\{H, T\}$ আসতে পারে। পরিক্ষার মোট ফলাফলকে Probability Tree এর সাহায্যে নিচে দেখানো হলো :




$\therefore$ নমুনাক্ষেত্রটি : $S = \{1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T\}$

$\therefore$ মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা $= 12$ টি।

ছক্কায় জোড় সংখ্যা ও মুদ্রার হেড আসার অনুকূল ফলাফল $= 3$ টি। যথা : $2H, 4H, 6H$

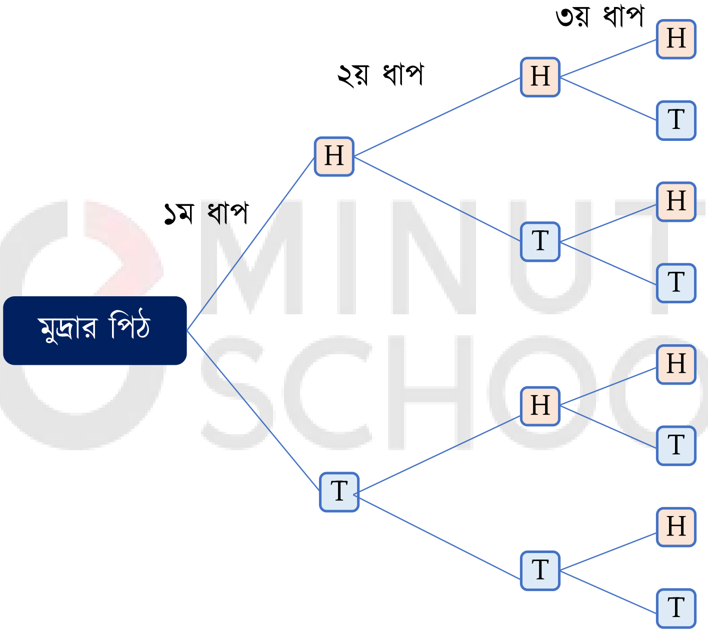
ছক্কার জোড় সংখ্যা ও মুদ্রার হেড আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{12}$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

(গ) মানিকের মুদ্রাটি তিনবার নিক্ষেপ করা হলে Probability Tree অঙ্কন করে নমুনাক্ষেত্র হতে কমপক্ষে একটি টেল পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

প্রশ্নের শর্তানুসারে Probability Tree নিচে আঁকা হলো :

মানিকের মুদ্রা নিক্ষেপ পরিক্ষাকে তিন ধাপ হিসেবে বিবেচনা করি। মুদ্রা নিক্ষেপের প্রতি ধাপে দুইটি ফলাফল $\{H, T\}$ আসতে পারে। পরিক্ষার মোট ফলাফলকে Probability Tree এর সাহায্যে নিচে দেখানো হলো :




$\therefore$ নমুনাক্ষেত্রটি : $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

$\therefore$ মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা $= 8$ টি।

কমপক্ষে একটি টেল আসার অনুকূল ফলাফল $= 7$ টি। যথা : $HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT$

**কমপক্ষে একটি টেল পাওয়ার সম্ভাবনা** $= \frac{7}{8}$

# Jessore BOARD

দেওয়া আছে, $F(x) = \frac{2x-3}{3x+2}$ এবং $A = \frac{2x}{x^4-1}$ [ যশোর বোর্ড – ২০১৯ ]

(ক) $F$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।

(খ) $F^{-1}(-3)$ নির্ণয় কর।

(গ) $A$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

## উত্তর

(ক) $F$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $F(x) = \frac{2x-3}{3x+2}$

এখন, $F(x) = \frac{2x-3}{3x+2} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $3x + 2 \neq 0$ হয়

$3x \neq -2$

বা, $x \neq -\frac{2}{3}$

$\therefore$**ডোম, $\mathbf{F = R - \{-\frac{2}{3}\}}$**

(খ) $F^{-1}(-3)$ নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $F(x) = \frac{2x-3}{3x+2}$

ধরি, $y = F(x) = \frac{2x-3}{3x+2}$

$\therefore y = \frac{2x-3}{3x+2}$

বা, $3xy + 2y = 2x - 3$

বা, $3xy - 2x = -2y - 3$

বা, $x(3y - 2) = -2y - 3$

বা, $x = \frac{-2y-3}{3y-2}$

বা, $F^{-1}(y) = \frac{-2y-3}{3y-2}$

বা, $F^{-1}(x) = \frac{-2x-3}{3x-2}$

$$\therefore F^{-1}(-3) = \frac{-2(-3)-3}{3(-3)-2}$$

$$= \frac{6-3}{-9-2}$$

$$= \frac{3}{-11}$$

$$= -\frac{3}{11}$$

**নির্ণেয় $F^{-1}(-3) = -\frac{3}{11}$**

(গ) $A$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

দেওয়া আছে, $A = \frac{2x}{x^4-1}$

$= \frac{2x}{(x^2)^2-(1)^2}$

$= \frac{2x}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$= \frac{2x}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$

ধরি,

$$\frac{2x}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+E}{x^2+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

$(i)$ নং এর উভয়পক্ষকে $(x^2+1)(x+1)(x-1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$2x \equiv A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + Cx + E)(x+1)(x-1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$

বা, $2x \equiv A(x^3 + x - x^2 - 1) + B(x^3 + x + x^2 + 1) + (Cx + E)(x^2 - 1)$

বা, $2x \equiv Ax^3 + Ax - Ax^2 - A + Bx^3 + Bx + Bx^2 + B + Cx^3 - Cx + Ex^2 - E)$

বা, $2x \equiv (A + B + C)x^3 + (-A + B + E)x^2 + (A + B - C)x + (-A + B - E) \ldots\ldots.(iii)$

$(ii)$ নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$2.1 = 0 + B(1+1)(1^2+1) + 0$$

বা, $2 = 4B$

বা, $B = \frac{2}{4}$

$\therefore B = \frac{1}{2}$

$(ii)$ নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$2.(-1) = A(-1-1)\{(-1)^2 + 1\}) + 0 + 0$$

বা, $-2 = -4A$

বা, $A = \frac{-2}{-4}$

$\therefore A = \frac{1}{2}$

$(iii)$ নং হতে $x^3$ ও $x^2$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0 = A + B + C$

বা, $0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + C$

বা, $0 = 1 + C$

$\therefore C = -1$

$0 = -A + B + E$

বা, $0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + E$

$\therefore C = 0$

এখন $(i)$ নং এ $A, B, C$ ও $E$ এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{2x}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} \equiv \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{(-1)x+0}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x}{x^2+1}$$

**[যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ]**

# সমীকরণ

$\sqrt[3]{(1+y)} + \sqrt[3]{(1-y)} = \sqrt[3]{2} \ldots \ldots \ldots (i)$

এবং $x^2 + 8x - 5 = 0 \ldots \ldots \ldots (ii)$ দুইটি সমীকরণ। [ যশোর বোর্ড – ২০১৯ ]

(ক) $5^{y+2} = 625$ হলে $y$ এর মান নির্ণয় করো?

(খ) সমীকরণ $(i)$ এর মূলসমূহ নির্ণয় করো।

(গ) লেখের সাহায্যে সমীকরণ $(ii)$ সমাধান করো।



## উত্তর

(ক) $5^{y+2} = 625$ হলে $y$ এর মান নির্ণয় করো?

দেওয়া আছে, $5^{y+2} = 625$

বা, $5^{y+2} = 5^4$

বা, $y + 2 = 4$

বা, $y = 4 - 2$

$\therefore y = 2$

**$\therefore y$ এর মান 2.**

(খ) সমীকরণ $(i)$ এর মূলসমূহ নির্ণয় করো।

সমীকরণ  নং হতে,

$$\sqrt[3]{(1+y)}+\sqrt[3]{(1-y)}=\sqrt[3]{2}$$

বা, $(1+y)^{\frac{1}{3}}+(1-y)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$

বা, $1+y+1-y+3(1+y)^{\frac{1}{3}}(1-y)^{\frac{1}{3}}\left\{(1+y)^{\frac{1}{3}}+(1-y)^{\frac{1}{3}}\right\}=2$

**[উভয়পক্ষকে ঘন করে]**

বা, $2+3(1+y)^{\frac{1}{3}}(1-y)^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{3}}=2$    $[\because (1+y)^{\frac{1}{3}}+(1-y)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}]$

বা, $3.2^{\frac{1}{3}}(1+y)^{\frac{1}{3}}(1-y)^{\frac{1}{3}}=0$

বা, $(1+y)^{\frac{1}{3}}(1-y)^{\frac{1}{3}}=0$

বা, $(1+y)(1-y)=0$    **[আবার ঘন করে]**

হয়, $1+y=0$

$\therefore y=-1$

অথবা, $1-y$

$\therefore y=1$

বা, $(1+y)^{\frac{1}{3}}(1-y)^{\frac{1}{3}}=0$

বা, $(1+y)(1-y)=0$    **[আবার ঘন করে]**

হয়, $1+y=0$

$\therefore y=-1$

**শুদ্ধি পরিক্ষাঃ**

$y=1$ হলে, বামপক্ষ $=\sqrt[3]{1+1}+\sqrt[3]{1-1}$

$=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{0}=\sqrt[3]{2}=$ ডানপক্ষ

$y=-1$ হলে, বামপক্ষ $=\sqrt[3]{1-1}+\sqrt[3]{1-(-1)}$

$=\sqrt[3]{0}+\sqrt[3]{1+1}=\sqrt[3]{2}=$ ডানপক্ষ

$\therefore y=1$ এবং $y=-1$ উভয় মানই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

**নির্ণেয় মূল $\pm 1$.**

(গ) লেখের সাহায্যে সমীকরণ $(ii)$ সমাধান করো।

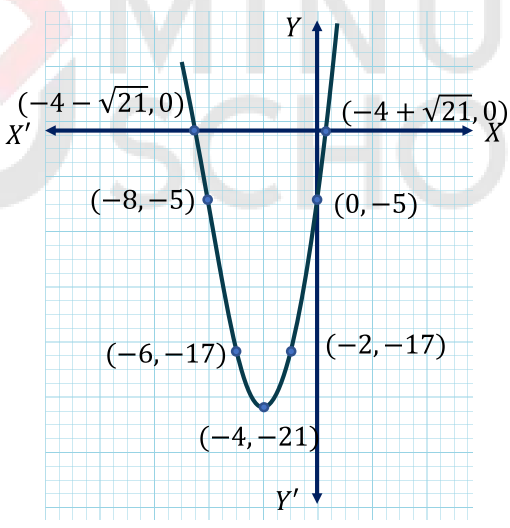
$(ii)$ নং সমীকরণ, $x^2 + 8x - 5 = 0$

মনে করি, $y = x^2 + 8x - 5$

সমীকরণটির লেখচিত্র অংকনের জন্য $x$ এর কয়েকটি মান নিয়ে তাদের অনুরূপ $y$ এর মান নির্ণয় করি:

| $x$ | $4-\sqrt{21}$ | $-8$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $-4+\sqrt{21}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $-5$ | $-17$ | $-21$ | $-17$ | $-5$ | $0$ |

সারণিতে স্থাপিত বিন্দুগুলো ছক কাগজের $x$ ও $y$ অক্ষ বরাবর প্রতি $1$ ঘর $= 1$ একক ধরে স্থাপন করে লেখচিত্র অঙ্কন করি।




দেখা যায়, লেখচিত্রটি $x$ –অক্ষকে $(-4-\sqrt{21}, 0)$ এবং $(-4+\sqrt{21}, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করেছে।

সুতরাং, সমীকরণটির একটি সমাধান $= -4-\sqrt{21} = 8.58$ ও অপর সমাধান $= -4+\sqrt{21} = 0.58$

নির্ণেয় সমাধান, $x = -8.58$ বা, $x = 0.58$.

# ত্রিকোণমিতি

$P = 10\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha$ এবং $Q = \frac{sin\theta - cos\theta + 1}{sin\theta + cos\theta - 1}$ [যশোর বোর্ড]

(খ) $P = 7$ হলে $cot\alpha$ এর মান নির্ণয় করো। যখন $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

(গ) প্রমাণ করো যে, $Q = \frac{1 + sin\theta}{cos\theta}$

## উত্তর

(খ) $P = 7$ হলে $cot\alpha$ এর মান নির্ণয় করো। যখন $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

দেওয়া আছে, $P = 10\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha$ এবং $P = 7$

$\therefore 10\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha = 7$

বা, $10(1 - \cos^2\alpha) + 6\cos^2\alpha = 7$

বা, $10 - 10\cos^2\alpha + 6\cos^2\alpha = 7$

বা, $10 - 4\cos^2\alpha - 7 = 0$

বা, $-4\cos^2\alpha + 3 = 0$

বা, $4\cos^2\alpha - 3 = 0$

বা, $4\cos^2\alpha = 3$

বা, $\cos^2\alpha = \frac{3}{4}$

বা, $cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

যেহেতু, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ অর্থাৎ $\alpha$ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে এবং $sin$ ও $cosec$ ব্যতীত সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ঋণাত্মক।

$\therefore cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

আমরা জানি, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

বা, $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

বা, $\sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore sin\alpha = \pm\frac{1}{2}$

যেহেতু, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ অর্থাৎ $\alpha$ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে এবং $sin$ ও $cosec$ ব্যতীত সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ঋণাত্মক।

$\therefore sin\alpha = \frac{1}{2}$

এখন, $cot\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = -\sqrt{3}$

**নির্ণেয় মান $cot\alpha = -\sqrt{3}$**

(গ) প্রমাণ করো যে, $Q = \frac{1+sin\theta}{cos\theta}$

দেওয়া আছে, $Q = \frac{sin\theta-cos\theta+1}{sin\theta+cos\theta-1}$

$$= \frac{(sin\theta-cos\theta+1)(sin\theta-cos\theta+1)}{(sin\theta-1+cos\theta)(sin\theta+1-cos\theta)}$$

$$= \frac{(sin\theta+1-cos\theta)^2}{\sin^2\theta-(1-\cos\ \theta)^2}$$

$$= \frac{(sin\theta+1)^2+\cos^2\theta-2cos\theta(sin\theta+1)}{\sin^2\theta-(1-2cos\theta+\cos^2\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta+2sin\theta+1+\cos^2\theta-2cos\theta(sin\theta+1)}{\sin^2\theta-1+2cos\theta-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1+2sin\theta+1-2cos\theta(sin\theta+1)}{-(1-\sin^2\theta)+2cos\theta-\cos^2\theta} \quad [\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$$

$$= \frac{2+2sin\theta-2cos\theta(sin\theta+1)}{-\cos^2\theta-\cos^2\theta+2cos\theta} \quad [\because 1-\sin^2\theta=\cos^2\theta]$$

$$= \frac{2(1+sin\theta)-2cos\theta(sin\theta+1)}{-2\cos^2\theta+2cos\theta}$$

$$= \frac{2(1+sin\theta)(1-cos\theta)}{2cos\theta(1-cos\theta)} = \frac{1+sin\theta}{cos\theta}$$

$\therefore \boldsymbol{Q = \frac{1+sin\theta}{cos\theta}}$ (প্রমাণিত)

**বিকল্প পদ্ধতিঃ**

$$Q = \frac{sin\theta-cos\theta+1}{sin\theta+cos\theta-1}$$

$$= \frac{\frac{sin\theta-cos\theta+1}{cos\theta}}{\frac{sin\theta+cos\theta-1}{cos\theta}}$$ [লব ও হরকে $cos\theta$ দ্বারা ভাগ করে]

$$= \frac{tan\theta-1+sec\theta}{tan\theta+1-sec\theta}$$

$$= \frac{sec\theta+tan\theta-1}{tan\theta-sec\theta+1}$$

$= \frac{sec\theta+tan\theta-(\sec^2\theta-\tan^2\theta)}{tan\theta-sec\theta+1}$ $[\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1]$

$= \frac{(sec\theta+tan\theta)-(sec\theta+tan\theta)(sec\theta-tan\theta)}{tan\theta-sec\theta+1}$

$= \frac{(sec\theta-tan\theta)(1-sec\theta+tan\theta)}{(1-sec\theta+tan\theta)}$

$= sec\theta + \tan\theta$

$= \frac{1}{cos\theta} + \frac{sin\theta}{cos\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$\therefore Q = \frac{1+sin\theta}{cos\theta}$ (প্রমাণিত)

# দ্বিপদী বিস্তৃতি

যদি $P = (1 - 2x + x^2)^2, Q = \left(2y^2 - \frac{1}{2y}\right)^8$ এবং $R = \left(y + \frac{k}{y}\right)^5$ [য. বো. '১৯]

(ক) প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে $P$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় করো।

(খ) $Q$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় করো।

(গ) $R$ এর বিস্তৃতিতে $k^4$ এর সহগ 135 হলে $y$ এর মান নির্ণয় করো।

## উত্তর

((ক) প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে $P$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $P = (1 - 2x + x^2)^2$

$= \{(1 - \mathrm{x})^2\}^2 = (1 - \mathrm{x}^4)$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে পাই,

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$\therefore (1 - x)^4 = 1 + 4(-x) + 6(-x)^2 + 4(-x)^3 + (-x)^4$

$= 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$

**নির্ণেয় বিস্তৃতি: $\mathbf{1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4}$**

(খ) $Q$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $Q = \left(2y^2 - \frac{1}{2y}\right)^8$

এখানে, $n = 8$ যা জোড় সংখ্যা।

সুতরাং মধ্যপদটি $= \left(\frac{n}{2} + 1\right)$ তম পদ।

$= \left(\frac{8}{2} + 1\right) = 4 + 1 = 5$ তম পদ

$\therefore 5$ বা $(4+1)$ তম পদ $= {}^8C_4(2y^2)^{8-4}\left(-\frac{1}{2y}\right)^4$

$= {}^8C_4(2y^2)^{8-4}$

$= {}^8C_4 . 16y^8 . (-1)^4 . \frac{1}{2^4} . y^{-4}$

$= \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} . 16 . \frac{1}{16} y^{8-4} = 70y^4$

***Q* এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ $70y^4$**

(গ) $R$ এর বিস্তৃতিতে $k^4$ এর সহগ 135 হলে $y$ এর মান নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $R = \left(y + \frac{k}{y}\right)^5$

দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে, $R = \left(y + \frac{k}{y}\right)^5$

$= y^5 + {}^5C_1\, y^{5-1}.\frac{k}{y} + {}^5C_2 y^{5-2}\left(\frac{k}{y}\right)^2 + {}^5C_3 y^{5-3}\left(\frac{k}{y}\right)^3 + {}^5C_4 y^{5-4}\left(\frac{k}{y}\right)^4 + \ \dots\dots\dots$

$= y^5 + 5y^4.\frac{k}{y} + \frac{5.4}{1.2}y^3.\frac{k^2}{y^2} + \frac{5.4.3}{1.2.3}y^2.\frac{k^3}{y^3} + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}y\,.\frac{k^4}{y^4} + \ \dots\dots\dots$

$= y^5 + 5y^3k + 10yk^2 + 10\frac{k^3}{y} + 5\frac{k^4}{y^3} + \ \dots\dots\dots$

প্রশ্নমতে, $\frac{5}{y^3} = 135$

বা, $135y^3 = 5$

বা, $y^3 = \frac{5}{135} = \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$

বা, $y = \frac{1}{3}$

**নির্ণেয় মান: $\frac{1}{3}$**

# স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

$P(-4,12), Q(7,7), R(10,-4)$ এবং $S(6,0)$ একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু।

[ যশোর বোর্ড - ২০১৯ ]

(ক) $PR$ এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

(খ) লেখচিত্রে প্রদর্শনপূর্বক $PQRS$ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) $PS$ রেখাটি $x$ অক্ষ ও $y$ অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ অঙ্কন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

## উত্তর

(ক) $PR$ এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $\mathrm{P}(-4,12)$

$\mathrm{R}(10,-4)$

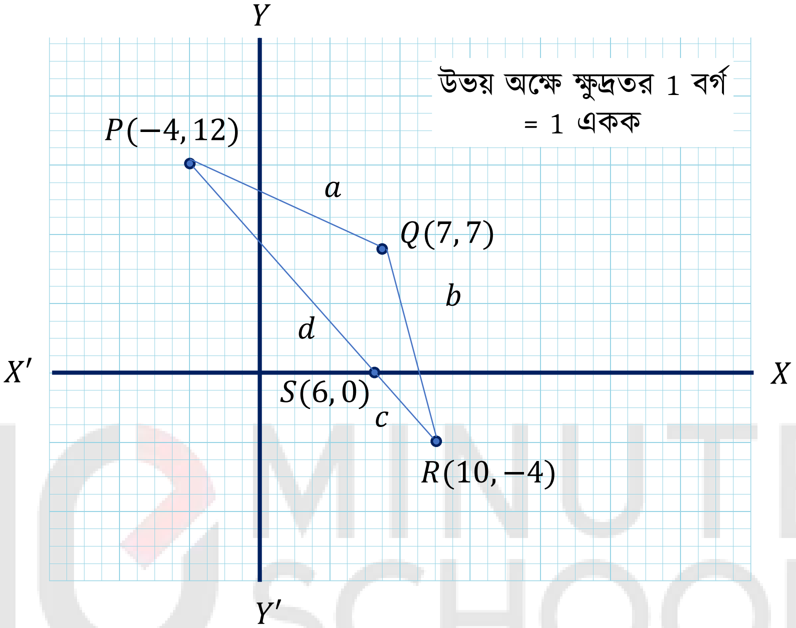
$\therefore \mathrm{PR}=\sqrt{(10+4)^2+(-4-12)^2}$ একক

$=\sqrt{14^2+(-16)^2}$ একক

$= \mathbf{2\sqrt{113}}$ **একক** (Ans)

(খ) লেখচিত্রে প্রদর্শনপূর্বক $PQRS$ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

বিন্দুপাতনের মাধ্যমে $xy$ সমতলে PQRS চতুর্ভুজটি দেখানো হলো।




বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজক্ষেত্র PQRS এর ক্ষেত্রফল,

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 7 & -4 & 6 & 10 & 7 \\ 7 & 12 & 0 & -4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(84 + 0 - 24 + 70 + 28 - 72 - 0 + 28)$$

$$= \frac{1}{2} \times 114 \text{ বর্গ একক}$$

$$= 57 \text{ বর্গ একক}$$ (Ans)

(গ) $PS$ রেখাটি $x$ অক্ষ ও $y$ অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ অঙ্কন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$\mathrm{P}(-4,12), \mathrm{S}(6,0)$

$\therefore$ PS রেখার সমীকরণ : $\frac{x+4}{-4-6} = \frac{y-12}{12-0}$

বা, $\frac{y-12}{x+4} = \frac{12}{-10}$

বা, $\frac{y-12}{x+4} = -\frac{6}{5}$

বা, $y - 12 = -\frac{6}{5}(x+4)$

বা, $y - 12 = -\frac{6}{5}x - \frac{24}{5}$

বা, $y = -\frac{6}{5}x - \frac{24}{5} + 12$

$\therefore y = -\frac{6}{5}x + \frac{36}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$(i)$ নং রেখাটি $x$ অক্ষকে $(6,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে এবং $y$ অক্ষকে $\left(0, \frac{36}{5}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

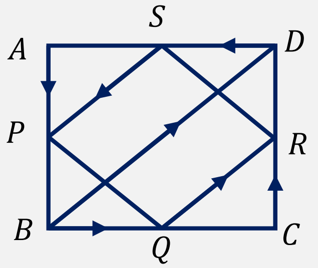
এখানে, উৎপন্ন ত্রিভুজটি সমকোণী।

$\therefore$ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য $= 6$ একক এবং $\frac{36}{5}$ একক।

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{36}{5}$ বর্গ একক

$= \frac{108}{5}$ বর্গ একক (Ans)

# ভেক্টর




$ABCD$ একটি বর্গ। $P, Q, R$ ও $S$ যথাক্রমে $AB, BC, CD$ ও $DA$ এর মধ্যবিন্দু। [যশোর বোর্ড ২০১৯]

(ক) $\overrightarrow{BD}$ কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরের সাহায্যে প্রকাশ করো।

(খ) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করো যে, $\Delta ABD$-এ $PS = \frac{1}{2}BD$.

(গ) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করো যে, $PQRS$ একটি সামান্তরিক।



## উত্তর

(ক) $\overrightarrow{BD}$ কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরের সাহায্যে প্রকাশ করো।

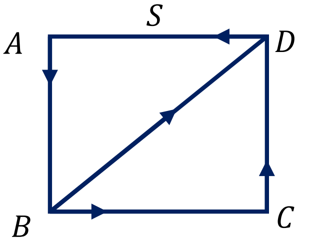
$\Delta ABD$ হতে পাই, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = 0$

বা, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}$

বা, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} - (-\overrightarrow{AD})$

বা, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$



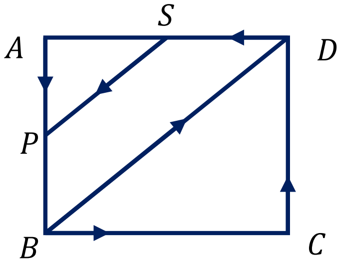

**অর্থাৎ, $\overrightarrow{BD}$ কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরের সাহায্যে প্রকাশ করা হলো।**

(খ) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করো যে, $\Delta ABD$-এ $PS = \frac{1}{2}BD$.

$\Delta ABD$-এর $AB$ ও $DA$ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $P$ ও $S$। প্রমাণ করতে হবে যে, $PS = \frac{1}{2}BD$

**প্রমানঃ** যেহেতু $P$ ও $S$ যথাক্রমে $AB$ ও $DA$ এর মধ্যবিন্দু,

$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{SA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$




বা, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AP}$

বা, $\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{SA}$

$\Delta ABD$ হতে $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = 0$

বা, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}$

বা, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{2AP} - \overrightarrow{2SA}$

বা, $\overrightarrow{BD} = -2(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AP})$

$\therefore -\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AP}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

এখন, $\Delta SAP$ হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুযায়ী $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AP}$

বা, $-\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AP}$

বা, $\overrightarrow{PS} = -(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AP})$

বা, $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

বা, $|\overrightarrow{PS}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|$

$\therefore \Delta ABD$-এ $PS = \frac{1}{2}BD$. **(প্রমাণিত)**

(গ) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করো যে, $PQRS$ একটি সামান্তরিক।

দেওয়া আছে, $ABCD$ একই বর্গ। $P, Q, R$ ও $S$ যথাক্রমে $AB, BC, CD$ ও $DA$ এর মধ্যবিন্দু।

মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}, \overrightarrow{BC} = \underline{b}, \overrightarrow{CD} = \underline{c}, \overrightarrow{DA} = \underline{d}$

তাহলে, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

$\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

কিন্তু, $(\underline{b} + \underline{c}) + (\underline{d} + \underline{a}) = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}$

$$= \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD} = \underline{0}$$

বা, $(\underline{b} + \underline{c}) = -(\underline{d} + \underline{a})$

বা, $\frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}) = -\frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

বা, $\overrightarrow{QR} = -\overrightarrow{SP}$

বা, $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$

বা, $|\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{PS}|$

বা, $QR = PS$

$\therefore QR$ ও $PS$ সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, $PQ$ ও $SR$ সমান ও সমান্তরাল।

**$\therefore PQRS$ একটি সামান্তরিক। (প্রমাণিত)**

# সম্ভাবনা

একটি ঝুড়িতে ৪ টি কালো বল, 5 টি লাল বল, 4 টি সাদা বল আছে এবং একটি পাঁচ টাকার মুদ্রা চারাবার নিক্ষেপ করা হলো। [ যশোর বোর্ড – ২০১৯ ]

(ক) একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে বিজোড় সংখ্যা অথবা 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপক অনুসারে মুদ্রাটির নমুনাক্ষেত্রসহ Probability Tree অঙ্কন কর।

(গ) যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পর পর তিনটি বল তুলে নেয়া হলে সবগুলো সবগুলো বল কালো হওয়ার সম্ভাবনা নির্নয় কর।



## উত্তর

(ক) একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে বিজোড় সংখ্যা অথবা 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে নমুনাক্ষেত্রটি : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ছক্কায় বিজোড় সংখ্যা আসার অনুকূল ফলাফল $= 3$ টি। যথা : $1, 3, 5$

$\therefore$ ছক্কায় বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

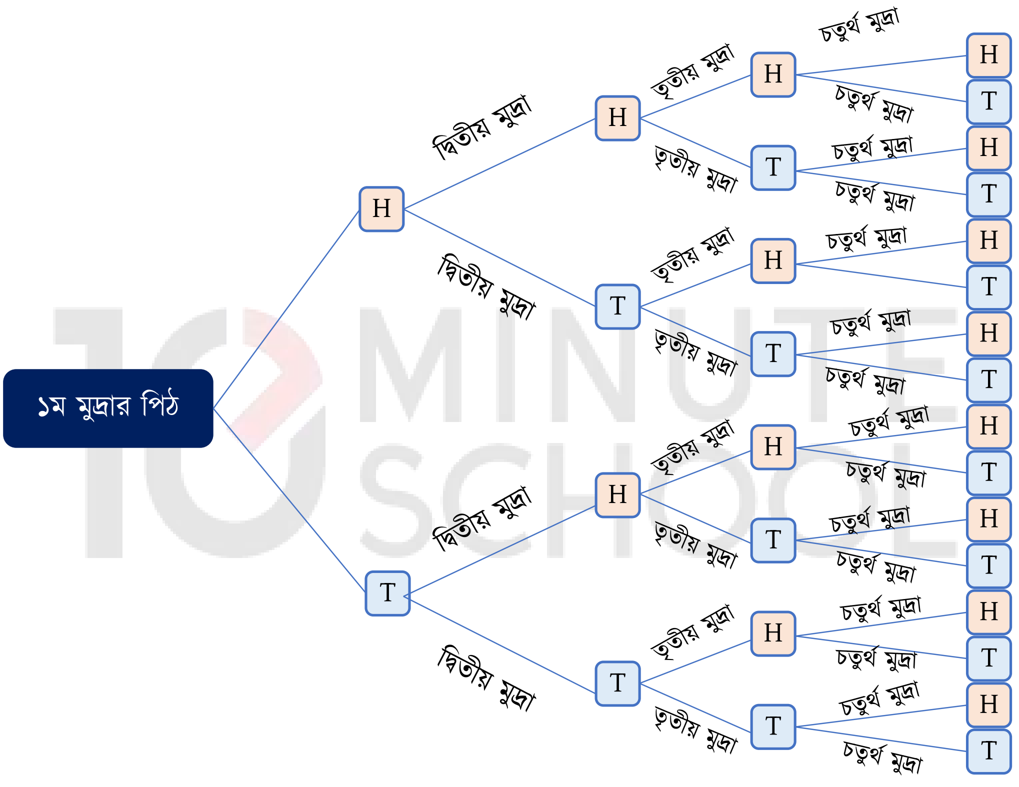
আবার ছক্কায় 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার অনুকূল ফলাফল $= 3$ টি। যথা : $2, 4, 6$

$\therefore$ ছক্কায় 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

এখন, $P($ ছক্কায় বিজোড় সংখ্যা অথবা 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা $) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$

(খ) উদ্দীপক অনুসারে মুদ্রাটির নমুনাক্ষেত্র Probability Tree অঙ্কন কর।

একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরিক্ষাকে চারটি ধাপ হিসেবে বিবেচনা করি, ফলে প্রতিটি ধাপে 2 টি ফলাফল $H$ অথবা $T$ আসতে পারে। সুতরাং মোট ফলাফলকে Probability Tree এর সাহায্যে দেখানো যায় :




∴ নমুনাক্ষেত্রটি : S={HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, HTHT, HTTH, HTTT, THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT}

(গ) যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পর পর তিনটি বল তুলে নেয়া হলে সবগুলো সবগুলো বল কালো হওয়ার সম্ভাবনা নির্নয় কর।

ঝুড়িতে কালো বল $= 8$ টি

ঝুড়িতে লাল বল $= 5$ টি

ঝুড়িতে সাদা বল $= 4$ টি

$\therefore$ ঝুড়িতে মোট বল $= (8 + 5 + 4)$ টি $= 17$ টি

প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পর পর তিনটি বল তুলে নেয়া হলে সবগুলো (তিনটি) বল কালো হওয়ার

সম্ভাবনা $= \frac{8}{17} \times \frac{7}{16} \times \frac{6}{15}$

$= \mathbf{\frac{7}{85}}$

নির্ণেয় সম্ভাবনা $\mathbf{\frac{7}{85}}$

# Chittagong BOARD

## সেট ও ফাংশন

$A = \{x: x\epsilon\ \mathbb{Z}$ এবং $x^2 \leq 4\}$

$B = \{x\epsilon\mathbb{N}: x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $x < 5\}$

$C = \{3,5\}$ [চ. বো. '১৯]

(ক) $C$ সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করো।

(খ) দেখাও যে, $P(B) \cup P(C) \subset P(B \cup C)$

(গ) $S = \{(x, y): x \in A, y \in A$ এবং $y = \sqrt{4 - x^2}\}$ অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করে ডোম $S$ নির্ণয় করো।



## উত্তর

(ক) $C$ সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করো।

দেওয়া আছে, $C = \{3,5\}$

$\therefore$ সেট গঠন পদ্ধতিতে $C = \{x \in \mathbb{N}: x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $1 < x < 7\}$

(খ) দেখাও যে, $P(B) \cup P(C) \subset P(B \cup C)$

দেওয়া আছে,

$B = \{x \epsilon \mathbb{N} : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $x < 5\}$

এবং $C = \{3,5\}$

আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $\mathbb{N} = \{1,2,3 \dots \dots \dots n, \dots \dots \dots\}$

$\therefore$ বিজোড় সংখ্যার সেট হবে $\{1,3,5 \dots \dots \dots (2n+1), \dots \dots \dots\}$

$\therefore B = \{1,3\}$

$\therefore P(B) = \{\{1\},\{3\},\{1,3\},\emptyset\}$

এবং $P(C) = \{\{3\},\{5\},\{3,5\},\emptyset\}$

$\therefore P(B) \cup P(C) = \{\{1\},\{3\},\{1,3\},\emptyset\} \cup \{\{3\},\{5\},\{3,5\},\emptyset\}$

$= \{\{1\},\{3\},\{5\},\{1,3\},\{3,5\},\emptyset\} \dots (i)$

আবার, $B \cup C = \{1,3\} \cup \{3,5\}$

$= \{1,3,5\}$

$\therefore P(B \cup C) = \{\{1\},\{3\},\{5\},\{1,3\},\{3,5\},\{1,5\},\{1,3,5\},\emptyset\} \dots (ii)$

(i) নং ও (ii) নং থেকে পাই,

$\boldsymbol{P(B) \cup P(C) \subset P(B \cup C)}$ [দেখানো হলো]

(গ) $S = \{(x, y): x \in A, y \in A$ এবং $y = \sqrt{4 - x^2}\}$ অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করে ডোম $S$ নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে,

$S = \{(x, y): x \in A, y \in A$ এবং $y = \sqrt{4 - x^2}\}$

$A = \{x: x \epsilon \mathbb{Z}$ এবং $x^2 \leq 4\}$

$x = 0$ হলে, $0^2 = 0 < 4$

$x = \pm 1$ হলে, $(\pm 1)^2 = 1 < 4$

$x = \pm 2$ হলে, $(\pm 2)^2 = 4 \leq 4$

$x = \pm 3$ হলে, $(\pm 3)^2 = 9 \nleq 4$

$\therefore A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

এখন $y = \sqrt{4 - x^2}$

অতএব $x = 0$ হলে $y = \sqrt{4 - 0^2}$

$= \sqrt{4} = 2 \in A$

$\therefore (0,2) \in S$

$x = \pm 1$ হলে $y = \sqrt{4 - (\pm 1)^2}$

$= \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} \notin A$

$\therefore (-1, \sqrt{3}) \notin S$ এবং $(1, \sqrt{3}) \notin S$

$x = \pm 2$ হলে $y = \sqrt{4 - (\pm 2)^2}$

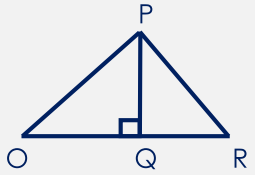
$= \sqrt{4 - 4} = 0 \in A$

$\therefore (-2,0) \in S$ এবং $(2,0) \in S$

$\therefore S = \{(0,2), (2,0), (-2,0)\}$

**$\therefore$ ডোম $S = \{-2, 0, 2\}$** $(Ans)$

# জ্যামিতি




$\Delta POR$ এ $\angle OPR = 90°$ [চ. বো. '১৯]

(ক) $\Delta OPR$ এর মধ্যমাত্রয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $3cm, 4cm$ ও $5cm$ হলে অতিভুজ $OR$ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(খ) প্রমাণ করো যে, $PR^2 = PO^2 + OR^2 - 2OR.PQ$

(গ) প্রমাণ করো যে, $PQ^2 = OQ.QR$



## উত্তর

(ক) $\Delta OPR$ এর মধ্যমাত্রয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $3cm, 4cm$ ও $5cm$ হলে অতিভুজ $OR$ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

আমরা জানি, সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে,

$3 \times$ অতিভুজের বর্গ $= 2$ (মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি)

$$\therefore 3 \times (OR)^2 = 2(3^2 + 4^2 + 5^2)$$

বা, $OR^2 = \frac{2}{3}(9 + 16 + 25)$

বা, $OR = \sqrt{\frac{100}{3}} = 5.7735$

$\therefore OR = 5.7735$ সে. মি. **(প্রায়)**

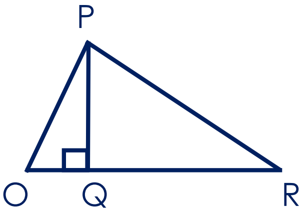
(খ) প্রমাণ করো যে, $PR^2 = PO^2 + OR^2 - 2OR.PQ$

**বিশেষ নির্বচনঃ** মনে করি, $\Delta POR$ এ $\angle OPR = 90°$ এবং $PQ \perp OR$। প্রমাণ করতে হবে যে, $PR^2 = PO^2 + OR^2 - 2OR.PQ$

**প্রমাণঃ** $\Delta OPQ$ এ $\angle OQP = 90°$

$\therefore PO^2 = PQ^2 + OQ^2 \ldots (i)$ **[পিথাগোরাসের উপপাদ্য]**

আবার,




$\Delta PQR$ এ $\angle PQR = 90°$

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2$

$= PQ^2 + (OR - OQ)^2$ $[\because \boldsymbol{QR = OR - OQ}]$

$= PQ^2 + OR^2 + OQ^2 - 2OR.OQ$

$= (PQ^2 + OQ^2) + OR^2 - 2OR.OQ$

$= PO^2 + OR^2 - 2OR.PQ$ **[$(i)$ নং থেকে]**

$\therefore PR^2 = PO^2 + OR^2 - 2OR.PQ$ **(প্রমাণিত)**

(গ) প্রমাণ করো যে, $PQ^2 = OQ.QR$

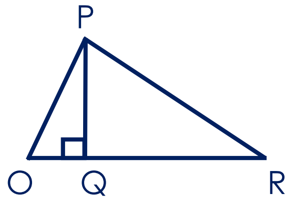
**বিশেষ নির্বচনঃ** $\Delta POR$ এর $\angle OPR = 90°$ এবং $PQ \perp OR$। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 = OQ.QR$

**প্রমাণঃ** $\Delta POR$ এ $\angle OPR = 90°$

$\therefore \angle OPQ + \angle QPR = 90° \ldots (i)$

আবার,

$\Delta OPQ$ এ $\angle OQP = 90°$ $[\because \boldsymbol{PQ \perp OR}]$




$\therefore \angle POQ + \angle OPQ = 90° \ldots (ii)$

$(i)$ ও $(ii)$ নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$\angle OPQ + \angle QPR = \angle POQ + \angle OPQ$$

$\therefore \angle QPR = \angle POQ$

এখন, $\Delta OPQ$ ও $\Delta PQR$ এর মধ্যে

$$\angle OQP = \angle PQR = 90°$$

$\angle POQ = \angle QPR$

এবং, অবশিষ্ট $\angle OPQ =$ অবশিষ্ট $\angle PRQ$

$\Delta OQP$ ও $\Delta PQR$ সদৃশকোণী

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \frac{OQ}{PQ} = \frac{PQ}{QR}$ বা, $OQ.QR = PQ^2$

$\therefore PQ^2 = OQ.QR$ **(প্রমাণিত)**

$K = y^2 - y - 1, L = \frac{2m}{m-1}, M = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$ যেখানে $n$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। [চ. বো. '১৯]

(ক) $K = 0$ হলে সমীকরণটির নিশ্চায়ক নির্ণয় করো।

(খ) $M$ এর বিস্তৃতিতে $x^2$ এর সহগ $\frac{6}{8}$ হলে $n$ এর মান নির্ণয় করো।

(গ) $2\sqrt{L} - \frac{6}{\sqrt{L}} = 1$ হলে, $m$ এর মান নির্ণয় করো।

## উত্তর

(ক) $K = 0$ হলে সমীকরণটির নিশ্চায়ক নির্ণয় করো।

এখানে, $K = y^2 - y - 1$

এখন, $K = 0$ হলে, $y^2 - y - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

$(i)$ নং কে $ay^2 + by + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$$a = 1, b = -1, c = -1$$

$\therefore$ নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4.1.(-1) = 1 + 4 = \mathbf{5}$

(খ) $M$ এর বিস্তৃতিতে $x^2$ এর সহগ $\frac{6}{8}$ হলে $n$ এর মান নির্ণয় করো।

এখানে, $M = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$

$M$ কে বিস্তৃত করে পাই,

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right)^n = \binom{n}{0}\left(-\frac{x}{2}\right)^0 + \binom{n}{1}\left(-\frac{x}{2}\right)^1 + \binom{n}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \dots\dots\dots$$

$$= 1 - \frac{nx}{2} + \frac{n(n-1)}{2}.\frac{x^2}{4} - \dots\dots\dots$$

$$= 1 - \frac{nx}{2} + \frac{n(n-1).x^2}{8} - \dots\dots\dots$$

এখানে, $x^2$ এর সহগ $= \frac{n(n-1)}{8}$

শর্তমতে, $\frac{n(n-1)}{8} = \frac{6}{8}$

বা, $n^2 - n = 6$

বা, $n^2 - n - 6 = 0$

বা, $n^2 - 3n + 2n - 6 = 0$

বা, $n(n-3) + 2(n-3) = 0$

বা, $(n-3)(n+2) = 0$

হয়, $n - 3 = 0$

$\therefore n = 3$

অথবা, $n + 2 = 0$

$\therefore n = -2$

কিন্তু $n \neq -2$ কারন $n$ অঋণাত্মক সংখ্যা।

$\therefore$ **$n$ এর মান 3**

(গ) $2\sqrt{L}-\frac{6}{\sqrt{L}}=1$ হলে, $m$ এর মান নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $L=\frac{2m}{m-1}$

এখন, $2\sqrt{L}-\frac{6}{\sqrt{L}}=1$

বা, $2\sqrt{L}.\sqrt{L}-6=\sqrt{L}$

বা, $2L-\sqrt{L}-6=0$

বা, $2L-4\sqrt{L}+3\sqrt{L}-6=0$

বা, $2\sqrt{L}(\sqrt{L}-2)+3(\sqrt{L}-2)=0$

বা, $(\sqrt{L}-2)(2\sqrt{L}+3)=0$

$\therefore$ হয়, $\sqrt{L}-2=0$

বা, $\sqrt{L}=2$

বা, $L=4$ **[বর্গ করে]**

বা, $\frac{2m}{m-1}=4$

বা, $4m-4=2m$

বা, $4m-2m=4$

বা, $2m=4$

$\therefore m=2$

অথবা, $2\sqrt{L}+3=0$

বা, $2\sqrt{L}=-3$

বা, $(2\sqrt{L})^2=(-3)^2$ **[বর্গ করে]**

বা, $4L=9$

বা, $4L.\frac{2m}{m-1}=9$

বা, $\frac{8m}{m-1}=9$

বা, $9m-9=8m$

বা, $9m-8m=9$

$\therefore m=9$

**শুদ্ধি পরিক্ষাঃ**

$m=2$ হলে, বামপক্ষ $=2\sqrt{\frac{2.2}{2-1}}-\frac{6}{\sqrt{\frac{2.2}{2-1}}}$

$=2\sqrt{4}-\frac{6}{\sqrt{4}}$

$=4-3=1=$ ডানপক্ষ

$m=9$ হলে, বামপক্ষ $= 2\sqrt{\frac{2.9}{9-1}} - \frac{6}{\sqrt{\frac{2.9}{9-1}}}$

$$= 2\sqrt{\frac{2.9}{8}} - \frac{6}{\frac{\sqrt{2.9}}{8}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{9}{4}} - \frac{6}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = 2.\frac{3}{2} - \frac{6}{\frac{3}{2}}$$

$$= 3 - 4 = -1 \neq \text{ডানপক্ষ}$$

$\therefore m = 9$ সমীকরণটির মূল নয়। নিরনেয় মান 2.

# অসীম ধারা

$1+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+y)^3}+\dots\dots\dots\dots\dots$ একটি ধারা। [ চট্টগ্রাম বোর্ড – ২০১৯ ]

(ক) যদি $y=3$ হয়, ধারাটি নির্ণয় কর এবং এর সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

(খ) $y=2$ হলে ধারাটির প্রথম ১০টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) $y$ এর উপর কি শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

## উত্তর

(ক) যদি $y=3$ হয়, ধারাটি নির্ণয় কর এবং এর সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

প্রদত্ত ধারাটি, $1+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+y)^3}+\dots\dots\dots$

$y=3$ হলে,

ধারাটি, $1+\frac{1}{1+3}+\frac{1}{(1+3)^2}+\frac{1}{(1+3)^3}+\dots\dots\dots$

$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\dots\dots\dots\dots$ (Ans)

এবং সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{1}{4}\div 1=\frac{1}{4}$ (Ans)

(খ) $y = 2$ হলে ধারাটির প্রথম ১০টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত ধারাটি, $1+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+y)^3}+\ldots\ldots\ldots$

$y = 2$ হলে,

ধারাটি, $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{(1+2)^2}+\frac{1}{(1+2)^3}+\ldots\ldots\ldots$

$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots$

ধারাটির ১ম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}$

$\therefore$ ধারাটির ১ম 10টি পদের সমষ্টি $=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$=\frac{1\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{59049}}{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{\frac{59049-1}{59049}}{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{59048}{59049}=\mathbf{\frac{29524}{19683}}$$ (Ans)

(গ) y এর উপর কি শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

ধারাটির ১ম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{1+y}}{1} = \frac{1}{1+y}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

বা, $\left|\frac{1}{1+y}\right| < 1$

বা, $|1+y| > 1$ **[ব্যস্তকরণ করে]**

অর্থাৎ, $1 + y > 1$

বা, $y > 0$

অথবা, $-(1+y) > 1$

বা, $1 + y < -1$

বা, $y < -2$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত : $y > 0$ অথবা $y < -2$

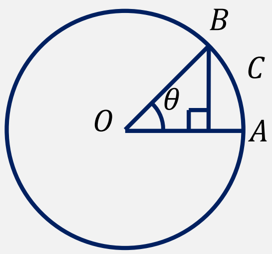
$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{1+y}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1+y-1}{1+y}}$$

$$= \frac{1+y}{y}$$ (Ans)

# ত্রিকোণমিতি




চিত্রে, $OA = 10$ সে. মি

[ চট্টগ্রাম বোর্ড – ২০১৯ ]

(ক) $\theta^{\circ}$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ করো।

(খ) যদি, $\theta = 60^{\circ}$ হয়, এবং একজন দৌড়বিদ $A$ বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে $B$ বিন্দুতে পৌঁছাতে $5$ সেকেন্ড সময় নেয় তবে তাঁর গতিবেগ নির্ণয় করো।

(গ) $2\left(\frac{OM}{OB}\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{BM}{OB}\right)^2$ হয় তবে $\theta$ এর মান নির্ণয় করো। [যেখানে $0^{\circ} < \theta < 2\pi$]

## উত্তর

(ক) $\theta^{\circ}$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ করো।

আমরা জানি, $1^{\circ} = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$\therefore \theta^{\circ} = \left(\frac{\pi}{180} \times \theta\right)$ রেডিয়ান

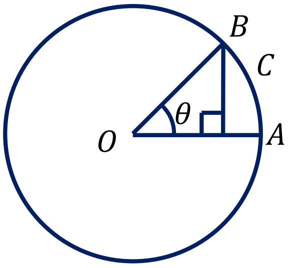
$= \frac{\theta\pi}{180}$ **রেডিয়ান**

(খ) যদি, $\theta = 60^{\circ}$ হয়, এবং একজন দৌড়বিদ $A$ বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে $B$ বিন্দুতে পৌঁছাতে 5 সেকেন্ড সময় নেয় তবে তাঁর গতিবেগ নির্ণয় করো।

এখানে, $AB$ চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ, $\theta = 60^{\circ}$

ব্যাসার্ধ, $OA = 10$ সে. মি.

ধরি, চাপ, $AB = S$ সে. মি.




আমরা জানি, $S = r\theta$

$= 10 \times 60°$ সে. মি.

$= 10 \times 60 \times \frac{\pi}{180}$ সে. মি.

$= \frac{10\pi}{180}$ সে. মি. $= \frac{10 \times 3.1416}{180}$ সে. মি. $= 10.472$ সে. মি.

দৌড়বিদের $A$ বিন্দু থেকে $B$ বিন্দুতে পৌঁছাতে সময় লাগে 5 সেকেন্ড

$\therefore$ দৌড়বিদের গতিবেগ $= \frac{10.472}{5}$ সে. মি./ সেকেন্ড

$= 2.094$ সে. মি./ সেকেন্ড

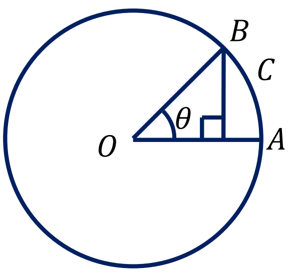
**নির্ণেয় গতিবেগ $2.094$ সে. মি./ সেকেন্ড (প্রায়)**

(গ) $2\left(\frac{OM}{OB}\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{BM}{OB}\right)^2$ হয় তবে $\theta$ এর মান নির্ণয় করো। [যেখানে $0^{\circ} < \theta < 2\pi$]

$\Delta OBM$ এ $\angle OMB = 90°$ এবং $\angle BOM = \theta$

$\therefore cos\theta = \frac{OM}{OB}$ এবং $sin\theta = \frac{BM}{OB}$

দেওয়া আছে,




$$2\left(\frac{OM}{OB}\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{BM}{OB}\right)^2$$

বা, $2\cos^2\theta = 1 + 2sin^2\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 2(1 - cos^2\theta) - 1 = 0$ $\quad$ [$\because$ $\mathbf{1 - cos^2\theta = \sin^2\theta}$]

বা, $2\cos^2\theta - 2 + 2\cos^2\theta - 1 = 0$

বা, $4\cos^2\theta - 3 = 0$

বা, $4\cos^2\theta = 3$

বা, $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$

বা, $cos\theta = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$

$cos\theta = \sqrt{\frac{3}{4}}$ হলে,

১ম চতুর্ভাগে, $cos\theta = \sqrt{\frac{3}{4}} = \cos\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

চতুর্থ চতুর্ভাগে, $cos\theta = \sqrt{\frac{3}{4}} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{11\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{11\pi}{6}$

আবার, $cos\theta = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$ হলে,

২য় চতুর্ভাগে, $cos\theta = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{5\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{5\pi}{6}$

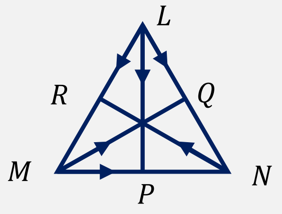
তৃতীয় চতুর্ভাগে, $cos\theta = -\sqrt{\frac{3}{4}}$

$$= -\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{7\pi}{6}$$

$\therefore \theta = \frac{7\pi}{6}$

**নির্ণেয় মান:** $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}}$.

# ভেক্টর




$\Delta LMN$ এর $MN, NL$ ও $LM$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $P, Q$ ও $R$ এবং $MN = 14\ cm$

[ চট্টগ্রাম বোর্ড – ২০১৯ ]

(ক) যদি কোনো গোলকের ব্যাস $MN$ হয় তবেঁ তার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NR} = \underline{0}$

(গ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করো যে, $R$ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত $MN$ এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই $Q$ বিন্দুগামী হবে।

## উত্তর

(ক) যদি কোনো গোলকের ব্যাস $MN$ হয় তবেঁ তার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $MN = 14\ cm$

$\therefore$ গোলকের ব্যাস $= 14\ cm$

$\therefore$ গোলকের ব্যাসার্ধ, $\mathrm{r} = \frac{14}{2} = 7\ cm$

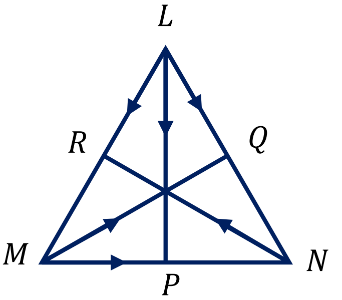
$\therefore$ গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল, $= 4\pi r^2$ বর্গ একক

$= 4 \times 3.1416 \times 7^2$ বর্গ একক

$= \mathbf{615.75}$ **বর্গ একক**

(খ) প্রমাণ করো যে, $\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NR} = \underline{0}$

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,




$\Delta LMQ$ হতে পাই, $\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{LQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LN}$

$\therefore \overrightarrow{LN} = 2\overrightarrow{LM} + 2\overrightarrow{MQ} \dots\dots\dots\dots (i)$

$\Delta LMN$ হতে পাই, $\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LN}$

বা, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LN} - \overrightarrow{LM}$

বা, $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{LM} - 2\overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{LM}$ **[$(i)$ হতে ]**

$\therefore \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LM} + 2\overrightarrow{MQ} \dots\dots\dots\dots (ii)$

$\Delta LMP$ হতে পাই, $\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{LP}$

বা, $\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{LM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ $[\because \overrightarrow{\boldsymbol{MP}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\boldsymbol{MN}}]$

বা, $\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{LM} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{LM} + 2\overrightarrow{MQ})$ **[$(ii)$ হতে ]**

$\therefore \overrightarrow{LP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MQ} \dots\dots\dots\dots (iii)$

$\Delta LNR$ হতে পাই, $\overrightarrow{LN} + \overrightarrow{NR} = \overrightarrow{LR}$

বা, $\overrightarrow{NR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LM} - \overrightarrow{LN}$ $[\because \overrightarrow{\boldsymbol{LR}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\boldsymbol{LM}}]$

বা, $\overrightarrow{NR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LM} - (2\overrightarrow{LM} + 2\overrightarrow{MQ})$ **[$(i)$ হতে ]**

$\therefore \overrightarrow{NR} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{LM} - 2\overrightarrow{MQ} \dots\dots\dots\dots (iv)$

এখন, বামপক্ষ $= \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NR}$

$= (\frac{3}{2}\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MQ}) + \overrightarrow{MQ} + (-\frac{3}{2}\overrightarrow{LM} - 2\overrightarrow{MQ})$ **[$(iii)$ ও $(iv)$ থেকে]**

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{LM} + 2\overrightarrow{MQ} - \frac{3}{2}\overrightarrow{LM} - 2\overrightarrow{MQ})$

$= \underline{0} =$ **ডানপক্ষ**

$\therefore \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NR} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

(গ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $R$ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত $MN$ এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই $Q$ বিন্দুগামী হবে।

এখানে, $\Delta LMN$ এর R, $LM$ এর মধ্যবিন্দু এবং $RQ \parallel MN$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $R$ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত $MN$ এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই $Q$ বিন্দুগামী হবে।

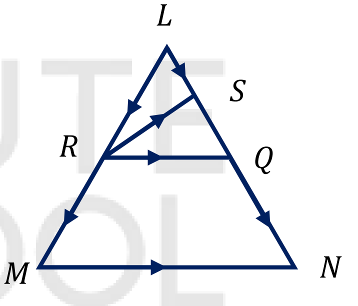
**প্রমাণ :** মনে করি, $Q$ নয় বরং $S$, $LN$ এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে, $\overrightarrow{LR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LM}$ এবং $\overrightarrow{LS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LN}$ [$\because$ **$R$ ও $S$ যথাক্রমে $LM$ ও $LN$ এর মধ্যবিন্দু**]

$\Delta LMN$-এ,

$\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LN}$ **[ভেক্টরযোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে]**

বা, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LN} - \overrightarrow{LM} \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$




$\Delta LRS$ হতে পাই,

$$\overrightarrow{LR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{LS}$$

বা, $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{LS} - \overrightarrow{LR}$

বা, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LN} - \frac{1}{2}\overrightarrow{LM}$

বা, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{LN} - \overrightarrow{LM})$

বা, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ **[$(i)$ হতে]**

$\therefore$ $\overrightarrow{RS}$ ও $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ $RS$ ও $MN$ সমান্তরাল হবে।

কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

সুতরাং $\overrightarrow{RS}$ ও $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ $RS$ ও $MN$ সমান্তরাল।

অর্থাৎ, $RS \parallel MN$, কিন্তু $RQ \parallel MN$.

$\therefore$ $RS$ ও $RQ$ অভিন্ন রেখা। অর্থাৎ $S$ ও $Q$ একই বিন্দু হবে।

$\therefore$ $Q$, $LN$ এর মধ্যবিন্দু।

অতএব, $R$ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত $MN$ এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই $Q$ বিন্দুগামী হবে। **(প্রমাণিত)**

# স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

$A(2,-3), B(7,-3)$ এবং $C(2,3)$ [ চট্টগ্রাম বোর্ড – ২০১৯ ]

(ক) BC রেখার ঢাল নির্ণয় কর।

(খ) বিন্দুত্রয় ছক কাগজে স্থাপন কর এবং প্রমাণ কর যে, এরা একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

(গ) AB কে অক্ষ ধরে $\Delta ABC$ কে এক পাক ঘুরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

## উত্তর

(ক) BC রেখার ঢাল নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $B(7,-3)$ এবং $C(2,3)$

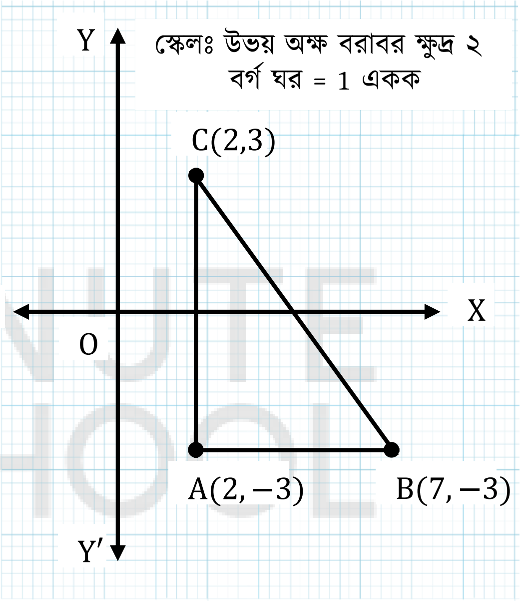
$\therefore$ BC রেখার ঢাল $= \frac{-3-3}{7-2}$

$= \frac{-6}{5}$

(খ) বিন্দুত্রয় ছক কাগজে স্থাপন কর এবং প্রমাণ কর যে, এরা একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

ছক কাগজে $XOX'$ কে $x$ অক্ষ এবং $YOY'$ কে $y$ অক্ষ এবং $O$ মূলবিন্দু ধরে $A(2,-3), B(7,-3)$ এবং $C(2,3)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি।

পেন্সিল দিয়ে $AB, AC$ ও $BC$ যোগ করি। তাহলে $ABC$ একটি ত্রিভুজ গঠন করে।




এখানে, $AB = \sqrt{(7-2)^2 + \{-3-(-3)\}^2}$

$= \sqrt{5^2 + 0^2}$

$= 5$

$\therefore AB^2 = 25$

$BC = \sqrt{(7-2)^2 + (-3-3)^2}$

$= \sqrt{5^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{61}$

$\therefore BC^2 = 61$

এবং $AC = \sqrt{(2-2)^2 + (-3-3)^2}$

$= \sqrt{0^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{36}$

$\therefore AC^2 = 36$

এখন, $AB^2 + AC^2 = 25 + 36$

$= 61$

$= BC^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2$

অর্থাৎ, $\Delta ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle A = 90°$

$A(2,-3), B(7,-3)$ এবং $C(2,3)$ বিন্দুগুলো একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। **(প্রমাণিত)**

(গ) AB কে অক্ষ ধরে $\Delta ABC$ কে এক পাক ঘুরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

'খ' হতে পাই, $AB = 5, BC = \sqrt{61}$ এবং $AC = 6$

চিত্রে $AB$ কে অক্ষ ধরে $\Delta ABC$ কে একপাক ঘোরানোর ফলে $BCD$ সমবৃত্তভূমিক কোণক উৎপন্ন হয়েছে।

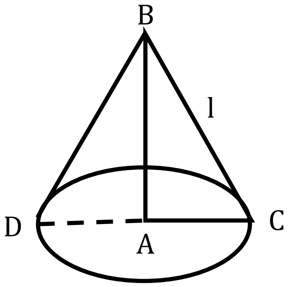
যার উচ্চতা $AB = h = 5$ একক। ভূমির ব্যাসার্ধ, $AC = r = 6$ একক

এবং হেলানো উচ্চতা $BC = l = \sqrt{61}$ একক

$\therefore$ সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r(r + l)$ বর্গ একক

$= 3.1416 \times 6(6 + \sqrt{61})$ বর্গ একক

$= 260.32$ বর্গ একক (প্রায়) (Ans)



# সম্ভাবনা

একটি ছক্কা একবার এবং একটি মুদ্রা দুইবার দৈনভাবে নিক্ষেপ করা হলো।

[ চট্টগ্রাম বোর্ড – ২০১৯ ]

(ক) যদি ছক্কাটি একবার নিক্ষেপ করা হয় তবে জোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

(খ) শুধুমাত্র মুদ্রাটি চারবার নিক্ষেপের Probability Tree অঙ্কন করে নমুনাক্ষেত্র তৈরি কর।

(গ) ছক্কায় জোড় সংখ্যা এবং মুদ্রায় TT পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

## উত্তর

(ক) যদি ছক্কাটি একবার নিক্ষেপ করা হয় তবে জোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

ছক্কাটি একবার নিক্ষেপ করা হলে নমুনাক্ষেত্রটি :

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ছক্কায় জোড় সংখ্যা আসার অনুকূল ফলাফল $= 3$ টি। যথা : $2, 4, 6$

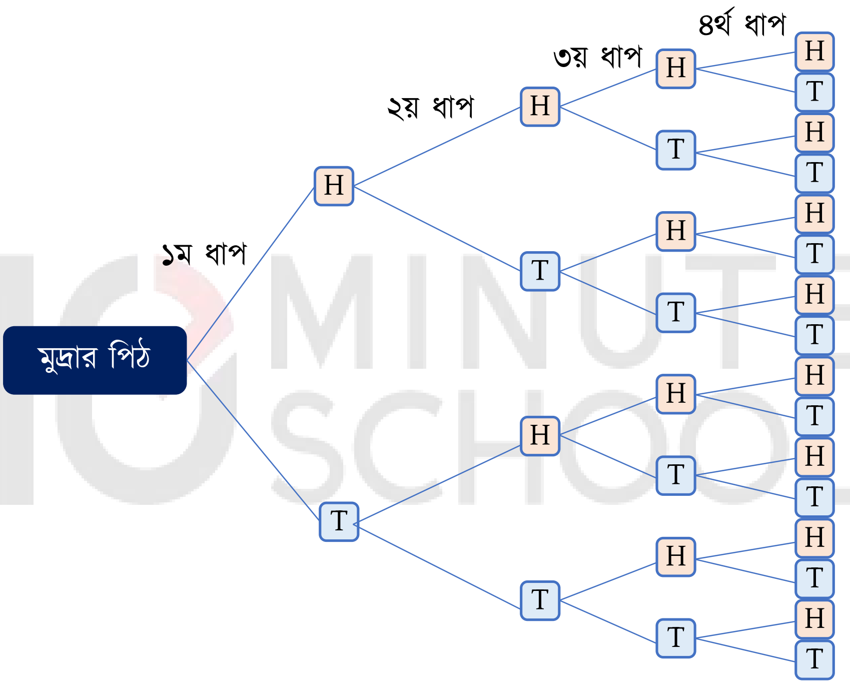
$\therefore$ ছক্কায় জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{6}$

$= \frac{1}{2}$

(খ) শুধুমাত্র মুদ্রাটি চারবার নিক্ষেপের Probability Tree অঙ্কন করে নমুনাক্ষেত্র তৈরি কর।

প্রশ্নের শর্তানুসারে Probability Tree নিচে আঁকা হলো :

মুদ্রাটি চারবার নিক্ষেপ পরিক্ষাকে চার ধাপ হিসেবে বিবেচনা করি। মুদ্রা নিক্ষেপের প্রতি ধাপে দুইটি ফলাফল $\{H, T\}$ আসতে পারে। পরিক্ষার মোট ফলাফলকে Probability Tree এর সাহায্যে নিচে দেখানো হলো :

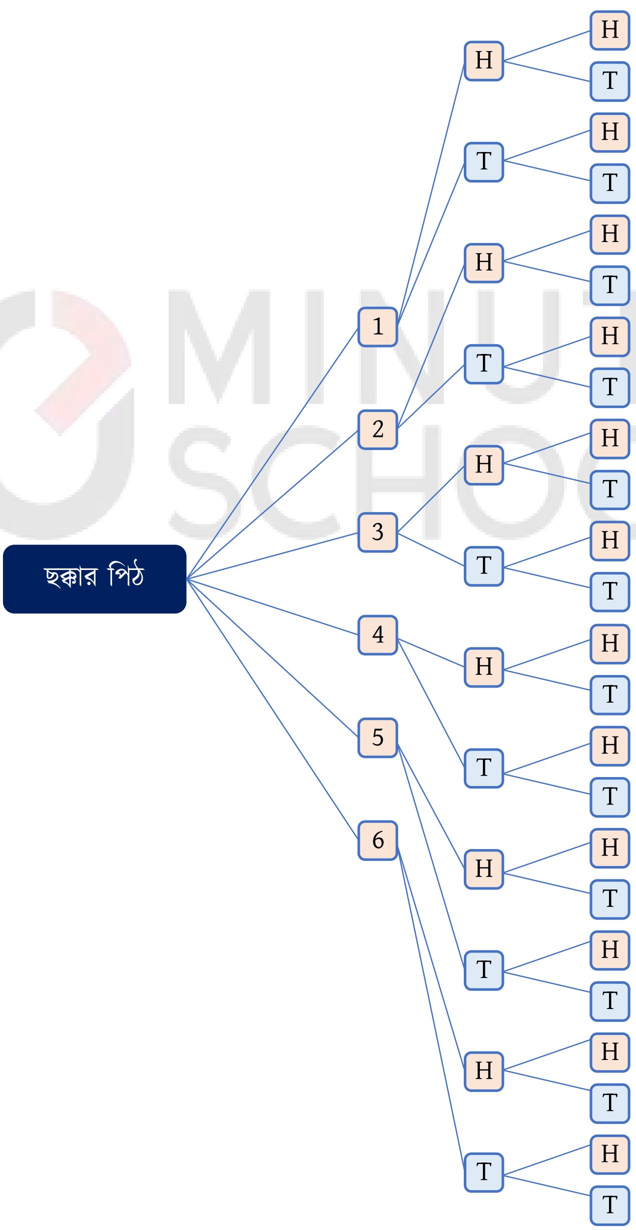



∴ নমুনাক্ষেত্রটি : S={HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, HTHT, HTTH, HTTT, THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT}

এখানে, মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা $= 16$ টি।

(গ) ছক্কায় জোড় সংখ্যা এবং মুদ্রায় TT পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

একটি ছক্কাকে একবার এবং একটি মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপ পরিক্ষাহকে তিন ধাপ বিবেচনা করে Probability tree এর সাহায্যে নিচে দেখানো হলো। প্রথম ধাপে একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ পরিক্ষায় $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ আসতে পারে। দ্বিতীয় ও তৃতীয় ধাপে একটি মুদ্রা একবার করে দুইবার নিক্ষেপ পরিক্ষায়ে প্রতিবার $\{H, T\}$ আসতে পারে।



$\therefore$ নমুনাক্ষেত্রটি : S={1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 2HH, 2HT, 2TH, 2TT,3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 4HH, 4HT, 4TH, 4TT, 5HH, 5HT, 5TH, 5TT, 6HH, 6HT, 6TH, 6TT}

এখানে, মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা $= 24$ টি।

ছক্কায় জোড় সংখ্যা এবং মুদ্রায় TT পাওয়ার অনুকূল ফলাফল $= 3$ টি। যথা : $2TT, 4TT, 6TT$

$\therefore$ ছক্কায় জোড় সংখ্যা এবং মুদ্রায় TT পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{3}{24}$

$$= \mathbf{\frac{1}{8}}$$

# Dinajpur BOARD

(i) $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{5}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1+x}{1-5x}$

(ii) $A = x(x+1)$ [দি. বো. '১৯]

(ক) $\{3,5,7\}$ এবং $\{1,2,3,4,\}$ সেটদ্বয় সমতূল কিনা নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, $f$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি এক-এক হলেও অনটু নয়।

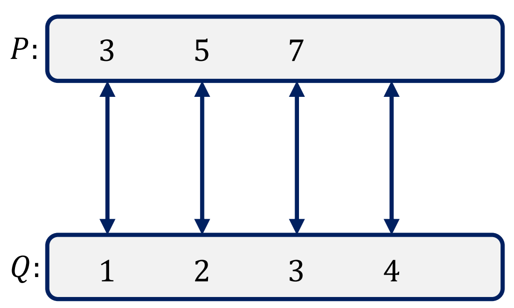
(গ) $\frac{3x^2+x+2}{A}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

## উত্তর

(ক) $\{3,5,7\}$ এবং $\{1,2,3,4,\}$ সেটদ্বয় সমতূল কিনা নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সেটদ্বয় $\{3,5,7\}$ এবং $\{1,2,3,4,\}$

ধরি, $P = \{3,5,7\}$ এবং $Q = \{1,2,3,4,\}$




এখানে, $P$ ও $Q$ সেটদ্বয়ের মধ্যে এক-এক মিল স্থাপন হয় নি।

$\therefore$ **$P$ ও $Q$ সেটদ্বয় সমতুল সেট নয়।**

(খ) দেখাও যে, $f$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি এক-এক হলেও অনটু নয়।

দেওয়া আছে, $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{5}\right\} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \frac{1+x}{1-5x}$

ধরি, $x_1, x_2 \in$ ডোম $f$

$\therefore f(x_1) = \frac{1+x_1}{1-5x_1}$

এবং $f(x_2) = \frac{1+x_2}{1-5x_2}$

এখন, $f(x)$ ফাংশনটি এক-এক ফাংশন হবে যদি ও কেবল যদি $f(x_1) = f(x_2)$ এর জন্য $x_1 = x_2$ হয়।

$f(x_1) = f(x_2)$ হলে, $\frac{1+x_1}{1-5x_1} = \frac{1+x_2}{1-5x_2})$

বা, $(1 + x_1)(1 - 5x_2) = (1 + x_2)(1 - 5x_1)$

বা, $1 - 5x_2 + x_1 - 5x_1x_2 = 1 - 5x_1 + x_2 - 5x_1x_2$

বা, $x_1 + 5x_1 = x_2 + 5x_2$

বা, $6x_1 = 6x_2$

$\therefore x_1 = x_2$

$\therefore f(x)$ ফাংশনটি একটি এক-এক ফাংশন।

আবার, ধরি, $y = f(x) = \frac{1+x}{1-5x}$

$\therefore y = \frac{1+x}{1-5x}$

বা, $y - 5xy = 1 + x$

বা, $y - 1 = 5xy + x$

বা, $y - 1 = x(5y + 1)$

বা, $x(5y + 1) = y - 1$

$\therefore x = \frac{y-1}{5y+1}$

এখন, $x = \frac{y-1}{5y+1} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $5y + 1 \neq 0$

বা,$y \neq -\frac{1}{5}$ হয়

$\therefore f(x)$ এর রেঞ্জ $= \mathbb{R} - \{-\frac{1}{5}\} \neq$ কোডোমেন

$\therefore f(x)$ ফাংশনটি অনটু নয়।

**$\therefore f$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনটি এক-এক হলেও অনটু নয়।**

**(দেখানো হলো)**

(গ) $\frac{3x^2+x+2}{A}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

দেওয়া আছে, $A = x(x+1)$

$$\therefore \frac{3x^2+x+2}{A} = \frac{(3x^2+x+2)}{x(x+1)}$$

$$= \frac{3x(x+1)-(2x+2)}{x(x+1)}$$

$$= 3 - \frac{2x-2}{x(x+1)}$$

ধরি, $\frac{2x-2}{x(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (i)$

$(i)$ নং এর উভয়পক্ষকে $x(x+1)$ দ্বারা গূণ করে পাই,

$$2x - 2 \equiv A(x+1) + Bx \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (ii)$$

$(ii)$ নং এ $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$$2 \times 0 - 2 = A(0+1) + 0$$

বা,$-2 = A$

$\therefore A = -2$

আবার, $(i)$ নং এ $A$ ও $B$ এর মান বসিয়ে পাই, $\frac{2x-2}{x(x+1)} \equiv \frac{-2}{x} + \frac{4}{x+1}$

$$\therefore \frac{3x^2+x+2}{A} = 3 - (-\frac{2}{x} + \frac{4}{x+1})$$

$= \mathbf{3 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x+1}}$ **,যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।**

$(i)\ y^x = 9, y^2 = 3^x$

$(ii)\ P = a(x+4)$ [দি. বো. '১৯]

(ক) $\sqrt{7x+1} + 10 = 2$ সমীকরণের সমাধান সেট নির্ণয় করো।

(খ) $(i)$ নং উদ্দীপকে বর্ণিত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করো।

(গ) $P > d, d \neq 0$ অসমতার সমাধান নির্ণয় করো।

## উত্তর

(ক) $\sqrt{7x+1} + 10 = 2$ সমীকরণের সমাধান সেট নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $\sqrt{7x+1} + 10 = 2$

বা, $\sqrt{7x+1} = 2 - 10$

বা, $\sqrt{7x+1} = -8$

বা,$\left(\sqrt{7x+1}\right)^2 = (-8)^2$ **[বর্গ করে]**

বা, $7x + 1 = 64$

বা, $7x = 64 - 1$

বা, $x = \frac{63}{7} = 9$

শুদ্ধি পরিক্ষাঃ $x = 9$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{7.9+1} + 10 = \sqrt{64} + 10 = 8 + 10 = 18 \neq$ ডানপক্ষ

**নির্ণয় সমাধান সেট, $S = \{\}$.**

(খ) $(i)$ নং উদ্দীপকে বর্ণিত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $y^x = 9 \ldots\ldots\ldots (i)$

এবং, $y^2 = 3^x \ldots\ldots\ldots (ii)$

$(i)$ নং হতে পাই,

$y^x = 9$

বা, $(y^x)^2 = 9^2$ **[বর্গ করে]**

বা, $y^{2x} = 81$

বা, $(y^2)^x = 3^4$

বা, $(3^x)^x = 3^4$

বা, $3^{x^2} = 3^4$

বা, $x^2 = 4$

বা, $x = \pm\sqrt{4}$

$\therefore x = \pm 2$

$x$ এর মান $(ii)$ নং এ বসিয়ে পাই,

$x = 2$ হলে,

$y^2 = 3^2$

বা, $y^2 = 9$

বা, $y = \pm\sqrt{9}$

$\therefore y = \pm 3$

আবার, $x = 2$ হলে,

$y^2 = 3^{-2}$

বা, $y^2 = \frac{1}{3^2}$

বা, $y^2 = \frac{1}{9}$

বা, $y = \pm\sqrt{\frac{1}{9}}$

$\therefore y = \pm\frac{1}{3}$

**নির্ণেয় সমাধান,** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{2}, \pm\mathbf{3})$ , $\left(-\mathbf{2}, \pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$.

(গ) $P > d, d \neq 0$ অসমতার সমাধান নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $P = a(x+4)$

এখানে, $P > d, d \neq 0$

বা, $a(x+4) > d$

এখন, $a$ ধনাত্মক হলে, $\frac{a(x+4)}{a} > \frac{d}{a}$ **[উভয়পক্ষকে $\boldsymbol{a}$ দ্বারা ভাগ করে]**

বা, $x + 4 > \frac{d}{a}$

বা, $x + 4 - 4 > \frac{d}{a} - 4$

$\therefore x > \frac{d}{a} - 4$

এখন, $a$ ঋণাত্মক হলে, $\frac{a(x+4)}{a} < \frac{d}{a}$ **[উভয়পক্ষকে $\boldsymbol{a}$ দ্বারা ভাগ করে]**

বা, $x + 4 < \frac{d}{a}$

বা, $x + 4 - 4 < \frac{d}{a} - 4$

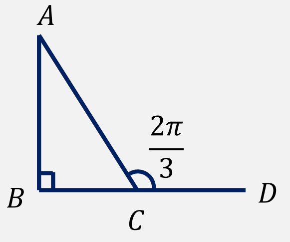
$\therefore x < \frac{d}{a} - 4$

**নির্ণেয় সমাধানঃ** $(\boldsymbol{i})\ \boldsymbol{x} > \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{a}} - \mathbf{4}$ **যদি** $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$ **হয়**

$(\boldsymbol{ii})\ \boldsymbol{x} < \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{a}} - \mathbf{4}$ **যদি** $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$ **হয়।**

# ত্রিকোণমিতি

$(i)$




$(ii)$ $2sin\alpha\ cos\alpha + 1 = 2cos\alpha + sin\alpha$ [দি. বো. '১৯]

(ক) $cos\theta = -\frac{4}{5}, 0 < \theta < \pi$ হলে, $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় করো।

(খ) প্রমাণ করো যে, $\cot(A + C) = \frac{cotA\ cotC - 1}{cotC + cot\,A} + cotB$

(গ) $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ সীমার মধ্যে $(ii)$ এ বর্ণিত সমীকরণটি সমাধান করো।

## উত্তর

(ক) $cos\theta = -\frac{4}{5}, 0 < \theta < \pi$ হলে, $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $cos\theta = -\frac{4}{5}$
আমরা জানি, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
বা, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$
$\therefore sin\theta = \pm\frac{3}{5}$
যেহেতু, $0 < \theta < \pi$ অর্থাৎ $\theta$ এর অবস্থান ১ম ও দ্বিতীয় চতুর্ভাগে। ১ম ও দ্বিতীয় চতুর্ভাগে $sin\theta$ ধনাত্মক।
$\therefore sin\theta = \frac{3}{5}$
এখন, $tan\theta = \frac{sin\theta}{\cos\theta}$
$= \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \times \frac{-5}{4} = -\frac{3}{5}$
নির্ণেয় মান $-\frac{3}{5}$

(খ) প্রমাণ করো যে, $\cot(A+C) = \frac{cotA\ cotC-1}{cotC\ +\cot A} + cotB$

চিত্র হতে, $\angle ACD = \frac{2\pi}{3}$

এবং, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$

অর্থাৎ, $\angle B = 90°$

$\therefore \angle ACB = \angle BCD - \angle ACD$

$= \pi - \frac{2\pi}{3}$ $\quad [\because 1$ **সরলকোণ** $= \boldsymbol{\pi^c}]$

$= \frac{\pi}{3}$

অর্থাৎ, $\angle C = \frac{\pi}{3}$

এখন, $\Delta ABC$ হতে পাই,

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \pi$$

বা, $\angle BAC + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \pi$

বা, $\angle BAC = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$

বা, $\angle BAC = \frac{6\pi-3\pi-2\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

অর্থাৎ, $\angle A = \frac{\pi}{6}$

বামপক্ষ $= \cot(A+C)$

$= \cot\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \cot\left(\frac{\pi+2\pi}{6}\right) = \cot\frac{3\pi}{6} = \cot\frac{\pi}{2} = 0$

ডানপক্ষ $= \frac{cotA\ cotC-1}{cotC\ +\cot A} + cotB$

$$= \frac{\cot\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{3}-1}{\cot\frac{\pi}{3}+\cot\frac{\pi}{6}} + \cot\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}} + 0 = \frac{1-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}} = 0$$

$\therefore \boldsymbol{\cot(A+C) = \frac{cotA\ cotC-1}{cotC\ +cot\ A} + cotB}$ **(প্রমাণিত)**

(গ) $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ সীমার মধ্যে $(ii)$ এ বর্ণিত সমীকরণটি সমাধান করো।

দেওয়া আছে, $2sin\alpha\ cos\alpha + 1 = 2cos\alpha + sin\alpha$

বা, $2sin\alpha\ cos\alpha = sin\alpha - 1$

বা, $2cos\alpha(sin\alpha - 1) = sin\alpha - 1$

বা, $2cos\alpha(sin\alpha - 1) - (sin\alpha - 1) = 0$

বা, $(2cos\alpha - 1)(sin\alpha - 1) = 0$

হয়, $2cos\alpha - 1 = 0$

বা, $2cos\alpha = 1$

বা, $cos\alpha = \frac{1}{2}$

অথবা, $sin\alpha - 1 = 0$

বা, $sin\alpha = 1$

$cos\alpha = \frac{1}{2}$ হলে,

$$cos\alpha = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

$cos\alpha = \frac{1}{2}$ হলে,

$$cos\alpha = \frac{1}{2} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{3}$$

$\therefore \alpha = \frac{5\pi}{3}$

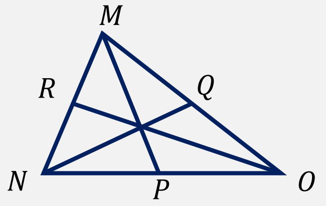
আবার, $sin\alpha = 1$ হলে,

$$sin\alpha = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2}$

**নির্ণেয় সমাধান:** $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}}$

# ভেক্টর




$P, Q, R$ যথাক্রমে $NO, MO$ ও $MN$ এর মধ্যবিন্দু। [ দিনাজপুর বোর্ড – ২০১৯ ]

(ক) $M, N$ এবং $O$ এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}$ এবং $\underline{c}$ হলে দেখাও যে, $\overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b})$.

(খ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{OR} = \underline{0}$

(গ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $R$ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত $NO$ এর সমান্তরাল সরলরেখা $Q$ বিন্দুগামী হবে।

## উত্তর

(ক) $M, N$ এবং $O$ এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}$ এবং $\underline{c}$ হলে দেখাও যে, $\overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b})$.

এখানে, $M, N$ এবং $O$ এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}$ এবং $\underline{c}$.

$R, MN$ এর মধ্যবিন্দু হওয়ায় $R$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

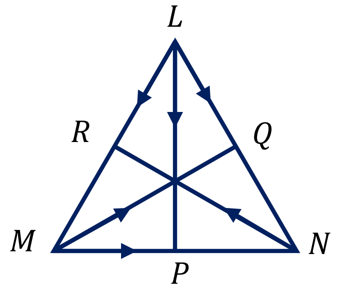
$Q, MQ$ এর মধ্যবিন্দু হওয়ায় $Q$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

$\therefore \overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

বা, $\overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c} - \underline{a} - \underline{b})$

$\therefore \overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b})$ **(দেখানো হলো)**

(খ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{OR}=\underline{0}$




ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,

$\Delta MNQ$ হতে পাই,

$$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$$

$\therefore \overrightarrow{MO}=2\overrightarrow{MN}+2\overrightarrow{NQ}\ \dots\dots\dots\dots(i)$

$\Delta MNO$ হতে পাই,

$$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{MO}$$

বা, $\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MN}$

বা, $\overrightarrow{NO}=2\overrightarrow{NM}-2\overrightarrow{NQ}-\overrightarrow{MN}$ [$(\boldsymbol{i})$ **হতে** ]

$\therefore \overrightarrow{NO}=\overrightarrow{MN}+2\overrightarrow{NQ}\ \dots\dots\dots\dots(ii)$

$\Delta MNP$ হতে পাই,

$$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$$

বা, $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{NO}$ $[\because \boldsymbol{\overrightarrow{NP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{NO}}]$

বা, $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MN}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{MN}+2\overrightarrow{NQ})$ [$(\boldsymbol{ii})$ **হতে** ]

$\therefore \overrightarrow{MP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NQ}\ \dots\dots\dots\dots(iii)$

$\Delta MOR$ হতে পাই,

$$\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{MR}$$

বা, $\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MO}$ $[\because \boldsymbol{\overrightarrow{MR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}}]$

বা, $\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}-(2\overrightarrow{MN}+2\overrightarrow{NQ})$ [$(\boldsymbol{ii})$ **হতে** ]

$\therefore \overrightarrow{OR}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{MN}-2\overrightarrow{NQ}\ \dots\dots\dots\dots(iv)$

এখন, বামপক্ষ $=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{OR}$

$$=(\frac{3}{2}\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NQ})+\overrightarrow{NQ}+(-\frac{3}{2}\overrightarrow{MN}-2\overrightarrow{NQ})$$ [$(\boldsymbol{iii})$ **ও** $(\boldsymbol{iv})$ **থেকে**]

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NQ} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MN} - 2\overrightarrow{NQ})$

$= \underline{0} =$ **ডানপক্ষ**

$\therefore \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{OR} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

(গ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $R$ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত $NO$ এর সমান্তরাল সরলরেখা $Q$ বিন্দুগামী হবে।

এখানে, $\Delta MNO$ এর R, $MN$ এর মধ্যবিন্দু এবং $RQ \parallel NO$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $R$ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত $NO$ এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই $Q$ বিন্দুগামী হবে।

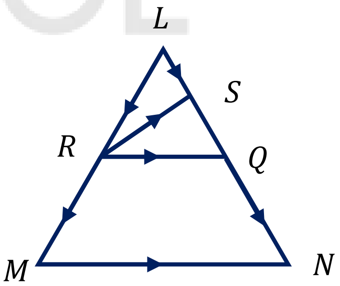
**প্রমাণ :** মনে করি, $Q$ নয় বরং $S, MO$ এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে, $\overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ এবং $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NO}$ [$\because$ **$R$ ও $S$ যথাক্রমে $MN$ ও $MO$ এর মধ্যবিন্দু**]

$\Delta MNO$-এ, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{MO}$ **[ভেক্টরযোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]**

বা, $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MN}$ ………… $(i)$

$\Delta MRS$ হতে পাই, $\overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MS}$




বা, $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MS} - \overrightarrow{MR}$

বা, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$

বা, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MN})$

বা, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NO}$ **[$(i)$ হতে]**

$\therefore \overrightarrow{RS}$ ও $\overrightarrow{NO}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ $RS$ ও $MN$ একই বা সমান্তরাল হবে।

কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

সুতরাং $\overrightarrow{RS}$ ও $\overrightarrow{NO}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ $RS$ ও $NO$ সমান্তরাল।

অর্থাৎ, $RS \parallel NO$, কিন্তু $RQ \parallel NO$.

$\therefore RS$ ও $RQ$ অভিন্ন রেখা। অর্থাৎ $S$ ও $Q$ একই বিন্দু হবে।

অতএব, $R$ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত $NO$ এর সমান্তরাল রেখা $Q$ বিন্দুগামী। **(প্রমাণিত)**

$A(3,0), B(0,4), P(5,a); A, P, B$ ঘড়ির কাঁটার বিপরীতক্রমে অবস্থিত। [ দিনাজপুর বোর্ড - ২০১৯ ]

(ক) একটি প্রিজমের ভূমি 4 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ এবং উচ্চতা 5 সে.মি. হলে, এর আয়তন নির্ণয় কর।

(খ) $\Delta PAB$ এর ক্ষেত্রফল 7 বর্গ একক হলে, $\Delta PAB$ এর পরিসীমা নির্ণয় কর।

(গ) AB রেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তাকে $y$ অক্ষের চতুর্দিকে একবার ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



## উত্তর

(ক) একটি প্রিজমের ভূমি 4 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ এবং উচ্চতা 5 সে.মি. হলে, এর আয়তন নির্ণয় কর।

সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times (\text{বাহু})^2$ বর্গ একক

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times (4)^2$ বর্গ সে.মি.

$= 8\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.

প্রিজমটির আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা ঘন একক

= ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$= 8\sqrt{3} \times 5$ ঘন সে.মি.

$= 40\sqrt{3}$ ঘন সে.মি. (Ans)

(খ) ΔPAB এর ক্ষেত্রফল 7 বর্গ একক হলে, ΔPAB এর পরিসীমা নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $A(3,0), B(0,4), P(5,a)$

এবং $\Delta PAB$ এর ক্ষেত্রফল $= 7$ বর্গ একক

বা, $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & a & 4 & 0 \end{vmatrix} = 7$

বা, $\frac{1}{2}|(3a+20)-12| = 7$

বা, $|3a+8| = 14$

$\therefore 3a+8 = \pm 14$

'+' নিয়ে $3a+8 = 14$

$\therefore a = 2$

'−' নিয়ে $3a+8 = -14$

$\therefore a = -\frac{22}{3}$ **[যা গ্রহণযোগ্য নয়]**

**[$\because$ A, P, B ঘড়ির কাঁটার বিপরীতক্রমে অবস্থিত]**

এখন,

$A(3,0), B(0,4), P(5,2)$

$AB = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$BP = \sqrt{(-5)^2+(4-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

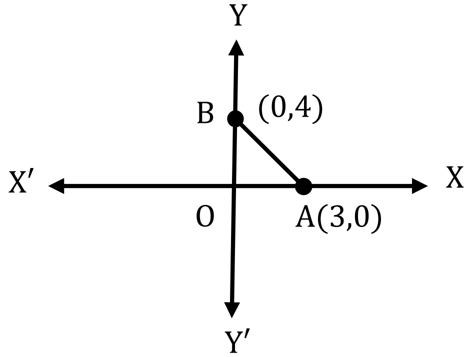
$PA = \sqrt{(5-3)^2+2^2} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

$\therefore$ ΔPAB এর পরিসীমা $= (AB+BP+PA)$ একক

$= (5+\sqrt{29}+2\sqrt{2})$ একক (Ans)

(গ) AB রেখা অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তাকে $y$ অক্ষের চতুর্দিকে একবার ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

OAB ত্রিভুজটি $y$ অক্ষের চতুর্দিকে একবার ঘোরালে $\mathrm{OA} = 3$ একক ব্যাসার্ধ এবং $\mathrm{OB} = 4$ একক উচ্চতা বিশিষ্ট সমবৃত্তভূমিক কোণক তৈরি হবে।




$\therefore r = 3$ একক

$h = 4$ একক

এবং $l = \sqrt{(3^2 + 4^2} = 5$ একক

$\therefore$ কোণকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r(l + r)$ বর্গ একক

$= \pi \times 3(5 + 3)$ বর্গ একক

$= 24\pi$ বর্গ একক

$= 75.39$ বর্গ একক (প্রায়) (Ans)

# Sylhet BOARD

$A = x^3 + x^2 + 4x + 4,\ B = a^y - (a^3 + a)a^{\frac{y}{2}-1} + a^2$ এবং $C = x^2 + 4x - 7$
[সি. বো. '১৯]

(ক) $C = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

(খ) $B = 0$ এবং $a > 0, a \neq 1$ হলে দেখাও যে, $y = 0,4$

(গ) $\frac{C}{A}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।



## উত্তর

(ক) $C = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $C = x^2 + 4x - 7$

$C = 0$ হলে, $0 = x^2 + 4x - 7$

বা, $x^2 + 4x - 7 = 0$ কে $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$$a = 1, b = 4, c = -7$$

∴নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac$

$= 4^2 - 4.1.(-7)$

$= 16 + 28 = 44 > 0$ এবং পূর্ণবর্গ নয়।

**∴সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ।**

(খ) $B = 0$ এবং $a > 0, a \neq 1$ হলে দেখাও যে, $y = 0,4$

দেওয়া আছে, $B = a^y - (a^3 + a)a^{\frac{y}{2}-1} + a^2$

$B = 0$ এবং $a > 0, a \neq 1$ হলে,

$$a^y - (a^3 + a)a^{\frac{y}{2}-1} + a^2 = 0$$

বা, $a^y - a(a^2 + 1)a^{\frac{y}{2}-1} + a^2 = 0$

বা, $a^y - a(a^2 + 1)a^{\frac{y}{2}}.a^{-1} + a^2 = 0$

বা, $a^y - (a^2 + 1)\sqrt{a^y} + a^2 = 0$

বা, $p - (a^2 + 1)\sqrt{p} + a^2 = 0$ **[$a^y = p$ ধরে]**

বা, $p - \sqrt{p}a^2 - \sqrt{p} + a^2 = 0$

বা, $\sqrt{p}(\sqrt{p} - a^2) - 1(\sqrt{p} - a^2) = 0$

বা, $(\sqrt{p} - a^2)(\sqrt{p} - 1) = 0$

হয়, $(\sqrt{p} - a^2) = 0$

বা, $\sqrt{p} = a^2$

বা, $(\sqrt{p})^2 = (a^2)^2$

বা, $p = a^4$

বা, $a^y = a^4$

$\therefore y = 4$

অথবা,$(\sqrt{p} - 1) = 0$

বা,$\sqrt{p} = 1$

বা,$(\sqrt{p})^2 = (1)^2$

বা,$p = 1$

বা, $a^y = 0$

$\therefore y = 0$

অতএব, $y = 0,4$

**(দেখানো হলো)**

(গ) $\frac{C}{A}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

দেওয়া আছে, $A = x^3 + x^2 + 4x + 4$

$$= x^2(x+1) + 4(x+1) = (x+1)(x^2+4)$$

এবং $C = x^2 + 4x - 7$

$\therefore \frac{C}{A} = \frac{x^2+4x-7}{(x+1)(x^2+4)}$

ধরি, $\frac{x^2+4x-7}{(x+1)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (i)$

$(i)$ নং এর উভয়পক্ষকে $(x+1)(x^2+4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 + 4x - 7 \equiv A(x^2+4) + (Bx+C)(x+1) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (ii)$$

$(ii)$ নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$(-1)^2+4(-1) - 7 = A\{(-1)^2 + 4\} + 0$$

বা, $1 - 4 - 7 = 5A$

বা, $-10 = 5A$

$\therefore A = -2$

$(ii)$ নং এ $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$$0 + 0 - 7 = A\{(0)^2 + 4\} + (0 + C)(0 + 1)$$

বা, $-7 = 4(-2) + C$

বা, $-7 = -8 + C$

$\therefore C = 1$

$(ii)$ নং হতে $x^2$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $1 = A + B$

বা, $1 = -2 + B$

বা, $1 + 2 = B$

$\therefore B = 3$

$(i)$ নং এ $A, B$ ও $C$ এর মান বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2+4x-7}{(x+1)(x^2+4)} \equiv \frac{-2}{x+1} + \frac{3x+1}{x^2+4}$ **,যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।**

## জ্যামিতি

$\Delta PQR$ এর $Q$ এবং $R$ বিন্দু হতে $PR$ ও $PQ$ এর উপর লম্ব $QM$ ও $RN$ এর ছেদবিন্দু $S$। পরিকেন্দ্র $T$ ও $S$ এর সংযোগকারী রেখা $PL$ মধ্যমাকে $O$ বিন্দুতে ছেদ করে।

[সি. বো. '১৯]

(ক) দেখাও যে, $A(1,2), B(4,3)$ এবং $C(7,4)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ।

(খ) দেখাও যে, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র $O$.

(গ) $PL \perp QR$ হলে, প্রমাণ করো যে, $QS.SM = RS.SN = PS.SL$



## উত্তর

(ক) দেখাও যে, $A(1,2), B(4,3)$ এবং $C(7,4)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ।

দেওয়া আছে, $A(1,2), B(4,3)$ এবং $C(7,4)$ তিনটি বিন্দু

এখন, $AB$ রেখার ঢাল $= \frac{2-3}{1-4} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

এবং, $BC$ রেখার ঢাল $= \frac{3-4}{4-7} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

যেহেতু, $AB$ এবং $BC$ রেখার ঢাল সমান, সুতরাং $A, B$ ও $C$ বিন্দু তিনটি সমরেখ। **(দেখানো হলো)**

(খ) দেখাও যে, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র $O$.

মনে করি, $\Delta PQR$ এর $Q$ এবং $R$ বিন্দু হতে $PR$ ও $PQ$ এর উপর লম্ব $QM$ ও $RN$ এর ছেদবিন্দু $S$। পরিকেন্দ্র $T$ ও $S$ এর সংযোগকারী রেখা $PL$ মধ্যমাকে $O$ বিন্দুতে ছেদ করে। $TL$ যোগ করলে $TL$ রেখা $QR$ এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $O$ বিন্দুটি $\Delta PQR$ এর ভরকেন্দ্র।

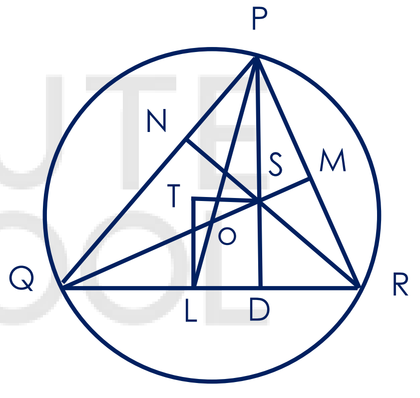
**অঙ্কনঃ** $QR$ বাহুর উপর $S$ বিন্দুগামী $PD$ লম্ব আঁকি।

**প্রমাণঃ** $\Delta PQR$ এর লম্ববিন্দু $S$ থেকে $P$ শীর্ষের দূরত্ব $PS$ এবং পরিকেন্দ্র $T$ থেকে $P$ শীর্ষের বিপরীত বাহু $QR$ এর দূরত্ব $TL$।

$\therefore PS = 2TL$

এখন, যেহেতু $PD$ ও $TL$ উভয়ই $QR$ এর উপর লম্ব।

সেহেতু, $PD \parallel TL$ এবং $PL$ তাদের ছেদক।




$\therefore \angle LPD = \angle PLT$ **[একান্তর কোণ]**

এখন $\Delta PSO$ ও $\Delta TLO$ এর মধ্যে

$\angle POS = \angle TOL$ **[বিপ্রতীপ কোণ]**

$\angle SPO = \angle TLO$ **[একান্তর কোণ]**

এবং অবশিষ্ট $\angle PSO = \angle LTO$

$\therefore \Delta PSO$ ও $\Delta TLO$ সদৃশকোণী, তাই সদৃশ।

সুতরাং, $\frac{PO}{OL} = \frac{PS}{TL}$

বা, $PO : OL = \frac{2TL}{TL} = \frac{2}{1}$

বা, $PO : OL = 2 : 1$

অর্থাৎ, $O$ বিন্দু $PL$ মধ্যমাকে $2:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore O$ বিন্দুটি $\Delta PQR$ এর ভরকেন্দ্র। **(প্রমাণিত)**

(গ) $PL \perp QR$ হলে, প্রমাণ করো যে, $QS.SM = RS.SN = PS.SL$

**বিশেষ নির্বচনঃ** দেওয়া আছে, $\Delta PQR$ এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুত্রয় এর উপর লম্ব $PL, QM$ ও $RN$ পরস্পর $S$ বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $QS.SM = RS.SN = PS.SL$

**প্রমাণঃ** $\Delta QSN$ ও $\Delta RSM$ –এ

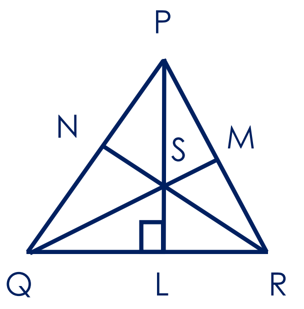
$\angle SNQ = \angle SMR = 90°$ [$\because \boldsymbol{RN \perp PQ, QM \perp PR}$]

এবং $\angle QSN = \angle RSM$ **[বিপ্রতীপ কোণ বলে]**

এবং অবশিষ্ট $\angle NQS =$ অবশিষ্ট $\angle MRS$

অর্থাৎ, ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।




$\therefore \frac{QS}{RS} = \frac{SN}{SM}$ $\therefore QS.SM = RS.SN \dots\dots (i)$

আবার, $\Delta QSL$ ও $\Delta PSM$ –এ,

$\angle SLQ = \angle SMP = 90°$ [$\because \boldsymbol{PL \perp QR, QM \perp PR}$]

এবং, $\angle QSL = \angle PSM$ **[বিপ্রতীপ কোণ]**

এবং অবশিষ্ট $\angle SPM =$ অবশিষ্ট $\angle SQL$

অর্থাৎ, ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \frac{QS}{PS} = \frac{SL}{SM}$ $\therefore PS.SL = QS.SM \dots\dots (ii)$

এখন, সমীকরণ $(i)$ ও $(ii)$ নং হতে পাই,

$\therefore PS.SL = QS.SM = RS.SN$ **(প্রমাণিত)**

$f(x) = \frac{5x-7}{x+4}$ এবং

$S = (7x-3)^{-1} + (7x-3)^{-2} + (7x-3)^{-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ [ সিলেট বোর্ড – ২০১৯ ]

(ক) সার্বিক সেট U এর যেকোনো উপসেট $A$ ও $B$ এর জন্য দেখাও যে, $A \setminus B = B' \setminus A'$

(খ) $f^{-1}(p) = 2f^{-1}(-2)$ হলে $p$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) x এর উপর কি শর্ত আরোপ করলে $S$ অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

## উত্তর

(ক) সার্বিক সেট U এর যেকোনো উপসেট $A$ ও $B$ এর জন্য দেখাও যে, $A \setminus B = B' \setminus A'$

ধরি, $x \in A \setminus B$

তাহলে, $x \in A$ এবং $x \notin B$

বা, $x \notin A'$ এবং $x \in B'$

বা, $x \in B'$ এবং $x \notin A'$

বা, $x \in B' \setminus A'$

$\therefore A \setminus B \subseteq B' \setminus A'$

আবার ধরি, $x \in B' \setminus A'$

তাহলে, $x \in B'$ এবং $x \notin A'$

বা, $x \notin B$ এবং $x \in A$

বা, $x \in A$ এবং $x \notin B$

বা, $x \in A \setminus B$

$\therefore B' \setminus A' \subseteq A \setminus B$

$\therefore A \setminus B = B' \setminus A'$ (দেখানো হলো)

(খ) $f^{-1}(p) = 2f^{-1}(-2)$ হলে $p$ এর মান নির্ণয় কর।

এখানে, $f(x) = \frac{5x-7}{x+4}$

ধরি, $f(x) = y$

$\therefore \frac{5x-7}{x+4} = y$

বা, $5x - 7 = xy + 4y$

বা, $5x - xy = 4y + 7$

বা, $x(5 - y) = 4y + 7$

বা, $x = \frac{4y+7}{5-y}$

বা, $f^{-1}(x) = \frac{4x+7}{5-x}$

এখন, $f^{-1}(p) = 2f^{-1}(-2)$

বা, $\frac{4p+7}{5-p} = 2.\frac{4(-2)+7}{5+2}$

বা, $\frac{4p+7}{5-p} = 2.\frac{-8+7}{7}$

বা, $28p + 49 = -10 + 2p$

বা, $28p - 2p = -10 - 49$

বা, $26p = -59$

$\therefore p = -\frac{59}{26}$ (Ans)

(গ) x এর উপর কি শর্ত আরোপ করলে $S$ অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

$S = (7x-3)^{-1} + (7x-3)^{-2} + (7x-3)^{-3} + \ldots\ldots\ldots$

$= \frac{1}{7x-3} + \frac{1}{(7x-3)^2} + \frac{1}{(7x-3)^3} + \ldots\ldots$

এখানে ১ম পদ, $a = \frac{1}{7x-3}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(7x-3)^2} \div \frac{1}{(7x-3)} = \frac{1}{7x-3}$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়।

বা, $\left|\frac{1}{7x-3}\right| < 1$

বা, $|7x-3| > 1$ **[ব্যস্তকরণ করে]**

অর্থাৎ, $7x - 3 > 1$

বা, $7x > 4$

$\therefore x > \frac{4}{7}$

অথবা, $-(7x-3) > 1$

বা, $7x - 3 < -1$

বা, $7x < 2$

$\therefore x < \frac{2}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত : $x > \frac{4}{7}$ অথবা $x < \frac{2}{7}$ (Ans)

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{\frac{1}{7x-3}}{1-\frac{1}{7x-3}}$

$= \frac{\frac{1}{7x-3}}{\frac{7x-3-1}{7x-3}}$

$= \frac{1}{7x-3} \times \frac{7x-3}{7x-4}$

$= \frac{1}{7x-4}$

(Ans)

# ত্রিকোণমিতি

$M = tan\theta, N = sec\theta$ এবং $P = sin\theta$ [সি. বো. '১৯]

(ক) পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি. মি.। পৃথিবীর উপরের যে দুইটি স্থান কেন্দ্রে $7°$ কোন উৎপন্ন করে তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করো।

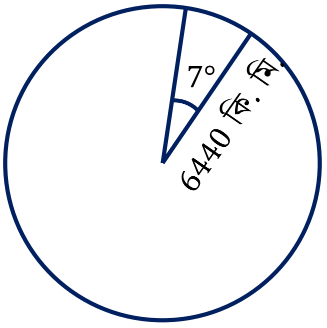
(খ) প্রমাণ করো যে, $\frac{1-M-N}{N-M-1} = \sqrt{\frac{1+P}{1-P}}$

(গ) $P^2N - \frac{1}{N} = 1$ হলে $\theta$ এর মান নির্ণয় করো। যেখানে, $0 \le \theta \le 2\pi$.

## উত্তর

(ক) পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি. মি.। পৃথিবীর উপরের যে দুইটি স্থান কেন্দ্রে $7°$ কোন উৎপন্ন করে তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করো।

মনে করি, পৃথিবীর $O$ কেন্দ্রে $A$ ও $B$ স্থান দুইটি $7°$ কোন উৎপন্ন করেছে।




$\therefore OB = 6440$ কি. মি.

এবং $AB =$ স্থান দুইটির দূরত্ব।

এখন, $\frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}} =$ কোণের বৃত্তীয় পরিমাপ

বা, $\frac{AB}{OB} = 7°$

বা, $\frac{AB}{6440} = 7°$

বা, $AB = \frac{7 \times 3.1416 \times 6440}{180} = 786.796$ কি. মি.

**সুতরাং স্থান দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 786.796 কি. মি. (প্রায়)।**

(খ) প্রমাণ করো যে, $\frac{1-M-N}{N-M-1} = \sqrt{\frac{1+P}{1-P}}$

দেওয়া আছে, $M = tan\theta, N = sec\theta$

এবং $P = sin\theta$

বামপক্ষ $= \frac{1-M-N}{N-M-1}$

$= \frac{1-tan\theta-sec\theta}{sec\theta-tan\theta-1}$

$= \frac{(\sec^2\theta-\tan^2\theta)-(tan\theta+sec\theta)}{sec\theta-tan\theta-1}$ $\quad [\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1]$

$= \frac{(sec\theta+tan\theta)(sec\theta-tan\theta)-(tan\theta++sec\theta)}{sec\theta-tan\theta-1}$

$= \frac{(sec\theta+tan\theta)(sec\theta-tan\theta-1)}{(sec\theta-tan\theta-1)}$

$= sec\theta + tan\theta = \frac{1}{cos\theta} + \frac{sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2}} = \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}$

$= \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sqrt{\frac{1+P}{1-P}} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1-M-N}{N-M-1} = \sqrt{\frac{1+P}{1-P}}$ (প্রমাণিত)

(গ) $P^2N-\frac{1}{N}=1$ হলে $\theta$ এর মান নির্ণয় করো। যেখানে, $0\le\theta\le 2\pi$.

দেওয়া আছে, $N=sec\theta, P=sin\theta$

$\therefore P^2\,N-\frac{1}{N}=1$

বা, $\sin^2\theta\, sec\theta-\frac{1}{\sec\,\theta}=1$

বা, $\sin^2\theta\frac{1}{cos\theta}-cos\theta=1$

বা, $\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{cos\theta}=1$

বা, $\sin^2\theta-\cos^2\theta=cos\theta$

বা, $1-\cos^2\theta-\cos^2\theta-cos\theta=0$ $\quad[\because \mathbf{1-\cos^2\theta=\sin^2\theta}]$

বা, $1-2\cos^2\theta-cos\theta=0$

বা, $2\cos^2\theta+cos\theta-1=0$

বা, $2\cos^2\theta+2cos\theta-cos\theta-1=0$

বা, $2cos\theta(cos\theta+1)-1(cos\theta+1)=0$

বা, $(2cos\theta-1)(cos\theta+1)=0$

হয়, $2cos\theta-1=0$

বা, $2cos\theta=1$

বা, $cos\theta=\frac{1}{2}$

অথবা, $cos\theta+1=0$

বা, $cos\theta=-1$

$cos\theta=\frac{1}{2}$ হলে, $cos=\frac{1}{2}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta=\frac{5\pi}{3}$

আবার, $cos\theta=-1$ হলে, $cos=-1=-\cos 0°=\cos(\pi-0°)=\cos\pi$

$\therefore \theta=\pi$

**নির্ণেয় মান, $\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3}}$**

$P=(1-y-2y^2)^6, Q=x^2+2-7^{\frac{2}{3}}-7^{-\frac{2}{3}}, x>0$ [ সিলেট বোর্ড - ২০১৯ ]

(ক) $\sqrt[x]{p}=\sqrt[y]{q}=\sqrt[z]{r}$ এবং $pqr=1$ হলে দেখাও যে, $x+y+z=0.$

(খ) $Q=0$ হলে প্রমাণ করো যে, $x^2+3=\frac{48}{7x}$

(গ) $P$ কে $y^3$ পর্যন্ত বিস্তৃত করে তা থেকে $(0.9\times1.05)^6$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করো।

## উত্তর

(ক) $\sqrt[x]{p}=\sqrt[y]{q}=\sqrt[z]{r}$ এবং $pqr=1$ হলে দেখাও যে, $x+y+z=0.$

দেওয়া আছে, $\sqrt[x]{p}=\sqrt[y]{q}=\sqrt[z]{r}$

ধরি, $\sqrt[x]{p}=\sqrt[y]{q}=\sqrt[z]{r}=\mathrm{k}$

বা, $p^{\frac{1}{x}}=q^{\frac{1}{y}}=r^{\frac{1}{z}}=k$

তাহলে পাই, $p=k^x, q=k^y, r=k^z$

এখন, $pqr=1$

বা, $k^x.k^y,k^x=1$

বা, $k^{x+y+z}=1$

$\therefore \boldsymbol{x+y+z=1}$ (দেখানো হলো)

(খ) $Q = 0$ হলে প্রমাণ করো যে, $x^2 + 3 = \frac{48}{7x}$

দেওয়া আছে, $Q = x^2 + 2 - 7^{\frac{2}{3}} - 7^{-\frac{2}{3}}$

$Q = 0$ হলে

$$x^2 + 2 - 7^{\frac{2}{3}} - 7^{-\frac{2}{3}} = 0$$

বা, $x^2 = 7^{\frac{2}{3}} + 7^{-\frac{2}{3}} - 2$

বা, $x^2 = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(7^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2.7^{\frac{1}{3}}.7^{-\frac{1}{3}}$

বা, $x^2 = \left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $x = 7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}$ **[বর্গমূল করে]**

বা, $x^3 = \left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ **[ঘন করে]**

বা, $x^3 = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(7^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3.7^{\frac{1}{3}}.7^{-\frac{1}{3}}\left(7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}\right)$

বা, $x^3 = 7 - 7^{-1} - 3.7^0.x$ $\left[\because \boldsymbol{x = 7^{\frac{1}{3}} - 7^{-\frac{1}{3}}}\right]$

বা, $x^3 = 7 - \frac{1}{7} - 3.1.x$

বা, $x^3 + 3x = 7 - \frac{1}{7}$

বা, $x(x^2 + 3) = \frac{49-1}{7}$

$\therefore \boldsymbol{x^2 + 3 = \frac{48}{7x}}$ **(প্রমাণিত)**

(গ) $P$ কে $y^3$ পর্যন্ত বিস্তৃত করে তা থেকে $(0.9 \times 1.05)^6$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $P = (1 - y - 2y^2)^6$

$= (1 - 2y + y - 2y^2)^6$

$= \{1(1 - 2y) + y(1 - 2y)\}^6$

$= \{(1 - 2y)(1 + y)\}^6 = (1 - 2y)^6(1 + y)^6$

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে,

$$P = (1 - 2y)^6(1 + y)^6$$

$= \left\{\binom{6}{0}(-2y)^0 + \binom{6}{1}(-2y)^1 + \binom{6}{2}(-2y)^2 + \binom{6}{3}(-2y)^3 + \cdots \ldots \ldots\right\} + \{\binom{6}{0}y^0 + \binom{6}{1}y^1 + \binom{6}{2}y^2 + \binom{6}{3}y^3$

$= \left\{1 + 6.(-2y) + \frac{6.5}{1.2}4y^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}8y^3 + \cdots \ldots \ldots\right\}$

$= (1 - 12y + 60y^2 - 160y^3 + \cdots)(1 + 6y + 15y^2 + 20y^3 + \cdots)$

$= 1 + 6y + 15y^2 + 20y^3 - 12y - 72y^2 - 180y^3 + 60y^2 + 360y^3 - 160y^3 + \cdots$

$= 1 - 6y + 3y^2 + 40y^3 + \cdots$

এখানে, $(1 + y)^6 = (1.05)^6$

বা, $1 + y = 1.05$

বা, $y = 1.05 - 1$

বা, $y = 0.05$

উক্ত বিস্তৃতিতে $y = 0.05$ বসিয়ে পাই,

$(1 - 2 \times 0.05)^6(1 + 0.05)^6$

$= 1 - 6 \times 0.05 + 3 \times (0.05)^2 + 40 \times (0.05)^3 + \cdots$

বা, $(0.9)^6(1.05)^6 = 0.7125$

$\therefore \mathbf{(0.9)^6(1.05)^6 = 0.7125}$ **(চার দশমিক স্থান পর্যন্ত)**

$DEF$ ত্রিভুজের ভূমি $a = 4.6$ সে.মি., অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি $s = 7.8$ সে.মি. এবং শিরঃকোণ $\angle x = 60°$। একটি নিরেট লৌহ গোলকের ব্যাস উক্ত ত্রিভুজের ভূমির সমান। লৌহ গোলকটিকে পিটিয়ে $\frac{3}{5}$ সে.মি.পুরু একটি বৃত্তাকার লৌহপাত প্রস্তুত করা হলো। [ সিলেট বোর্ড – ২০১৯ ]

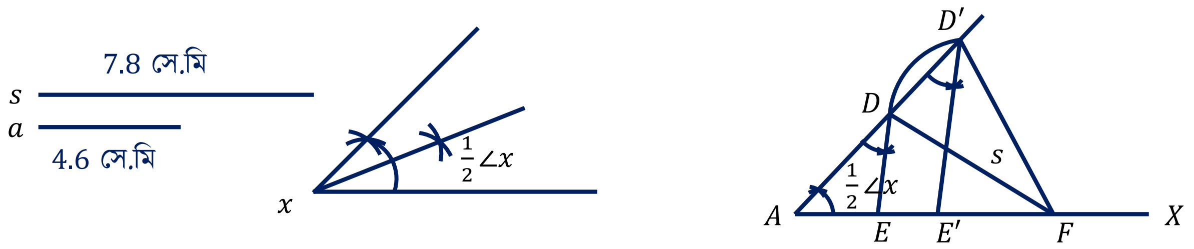
(ক) $DEF$ ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

(খ) লৌহপাতটির ব্যাস নির্ণয় কর।

(গ) যদি $\Delta DEF$ এর $DE$ ও $DF$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $P$ ও $Q$ হয় তবে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $PQ \parallel EF$

## উত্তর

(ক) $DEF$ ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।




$DEF$ ত্রিভুজের ভূমি $a = 4.6$ সে.মি., অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি $s = 7.8$ সে.মি. এবং শিরঃকোণ $\angle x = 60°$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

(খ) লৌহপাতটির ব্যাস নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, $\Delta DEF$ এর ভূমি $a = 4.6$ সে.মি.

$\therefore$ লৌহ গোলকের ব্যাস $= 4.6$ সে.মি.

$\therefore$ লৌহ গোলকের ব্যাসার্ধ $= \frac{4.6}{2} = 2.3$ সে.মি.

$\therefore$ লৌহ গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi(2.3)^3$

$= \frac{48.668}{3}\pi$ ঘন সে.মি.

মনে করি, পাতের ব্যাসার্ধ $= r$ সে.মি.

এবং পাতটি $\frac{3}{5}$ সে.মি. পুরু।

$\therefore$ পাতের আয়তন $= \pi r^2 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}\pi r^2$ ঘন সে.মি.

শর্তানুসারে $\frac{3}{5}\pi r^2 = \frac{48.668}{3}\pi$

বা, $9r^2 = 48.668 \times 5$

বা, $r^2 = \frac{48.668\times5}{9}$

বা, $r^2 = 27.0378$

বা, $r = \sqrt{27.0378}$

$\therefore r = 5.20$

$\therefore$ পাতের ব্যাস $= 2r = 2 \times 5.20$ সে.মি.

**$= 10.4$ সে.মি. (প্রায়)**

(গ) যদি $\Delta DEF$ এর $DE$ ও $DF$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $P$ ও $Q$ হয় তবে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $PQ \parallel EF$

এখানে, $\Delta DEF$ এর $DE$ ও $DF$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $P$ ও $Q$। $P, Q$ যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ \parallel EF$.

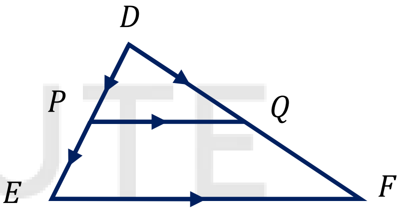
**প্রমাণ :** যেহেতু, $P$ ও $Q$ যথাক্রমে $DE$ ও $DF$ এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$ এবং $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$ [$\because$ **$R$ ও $S$ যথাক্রমে $LM$ ও $LN$ এর মধ্যবিন্দু**]

$\Delta LMN$ হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DF}$$

বা, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DE}$




$\Delta DPQ$ হতে পাই,

$\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{DQ}$ **[ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে]**

বা, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{DP}$

বা, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$

বা, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DE})$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$

আবার, $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{EF}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

সুতরাং, $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{EF}$ ভেক্টরদ্বয়ের রেখাদ্বয় $PQ$ ও $EF$ সমান্তরাল।

$\therefore PQ \parallel EF$ **(প্রমাণিত)**

# সম্ভাবনা

একটি বাক্সে 41 থেকে 60 পর্যন্ত ক্রমিক নম্বরযুক্ত টিকেট আছে। একটি টিকেট দৈবভাবে উঠানো হলো। [সি. বো. '১৯]

(ক) একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে বিজোড় সংখ্যা অথবা 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

(খ) টিকেটের ক্রমিক সংখ্যা 2 এবং 3 দ্বারা বিভাজ্য না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

(গ) দেখাও যে, টিকেটের ক্রমিক সংখ্যা মৌলিক হওয়ার সম্ভাবনা এবং 2, 3 ও 5 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনার সমষ্টি একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।



## উত্তর

(ক) একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে বিজোড় সংখ্যা অথবা 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে নমুনাক্ষেত্রটি $:S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ছক্কায় বিজোড় সংখ্যা আসার অনুকূল ফলাফল $= 3$ টি। যথা : $1, 3, 5$

$\therefore$ ছক্কায় বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

আবার ছক্কায় 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার অনুকূল ফলাফল $= 3$ টি। যথা : $2, 4, 6$

$\therefore$ ছক্কায় 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

এখন, $P($ ছক্কায় বিজোড় সংখ্যা অথবা 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা $) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$$= \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$$

(খ) টিকেটের ক্রমিক সংখ্যা 2 এবং 3 দ্বারা বিভাজ্য না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

বাক্সে 41 থেকে 60 পর্যন্ত ক্রমিক নম্বরযুক্ত টিকেটগুলো :

$$41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60.$$

$\therefore$ বাক্সে মোট টিকেট $= 20$ টি

টিকেটের ক্রমিক সংখ্যা 2 এবং 3 দ্বারা বিভাজ্য না এমন অনুকূল ফলাফল $= 16$ টি। যথা :

$41, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59$

$\therefore$ টিকেটের ক্রমিক সংখ্যা 2 এবং 3 দ্বারা বিভাজ্য না হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{16}{20}$

$$= \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$$

(গ) দেখাও যে, টিকেটের ক্রমিক সংখ্যা মৌলিক হওয়ার সম্ভাবনা এবং $2, 3$ ও $5$ দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনার সমষ্টি একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

বাক্সে $41$ থেকে $60$ পর্যন্ত ক্রমিক নম্বরযুক্ত টিকেটগুলো :

$$41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60.$$

$\therefore$ বাক্সে মোট টিকেট $= 20$ টি

টিকেটের ক্রমিক সংখ্যা মৌলিক হওয়ার অনুকূল ফলাফল $= 5$ টি। যথা : $41, 43, 47, 53, 59$

$\therefore$ টিকেটের ক্রমিক সংখ্যা মৌলিক হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{5}{20}$

$$= \frac{1}{4}$$

টিকেটের ক্রমিক সংখ্যা $2, 3$ ও $5$ দ্বারা বিভাজ্য হওয়ায় অনুকূল ফলাফল হচ্ছে $60$ অর্থাৎ $1$ টি।

$\therefore$ টিকেটের ক্রমিক সংখ্যা $2, 3$ ও $5$ দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{1}{20}$

টিকেটের ক্রমিক সংখ্যা মৌলিক হওয়ার সম্ভাবনা এবং $2, 3$ ও $5$ দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনার সমষ্টি

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$

$= \frac{5+1}{20}$

$= \frac{6}{20}$

**$= \frac{6}{20}$ , যা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।**

# Barisal BOARD

## সেট ও ফাংশন

১০ম শ্রেণীর 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে চালানো একটা জরিপে দেখা গেলো যে, 57 জন গোলাপ, 49 জন বেলি ও 37 জন শিক্ষার্থী হাসনাহেনা ফুল পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 27 জন গোলাপ ও বেলি, 23 জন বেলি ও হাসনাহেনা এবং 29 জন হাসনাহেনা ও গোলাপ ফুল পছন্দ করে। 17 জন শিক্ষার্থী তিনটি ফুলই পছন্দ করে। [ব. বো. '১৯]

(ক) সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ তথ্যসমূহকে ভেন চিত্রে দেখাও।

(খ) কতজন শিক্ষার্থী ফুল তিনটির কোনটিই পছন্দ করে না? নির্ণয় করো।

(গ) কতজন শিক্ষার্থী ফুল তিনটির কেবল একটি ফুল পছন্দ করে? নির্ণয় করো।

### উত্তর

(ক) সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ তথ্যসমূহকে ভেন চিত্রে দেখাও।

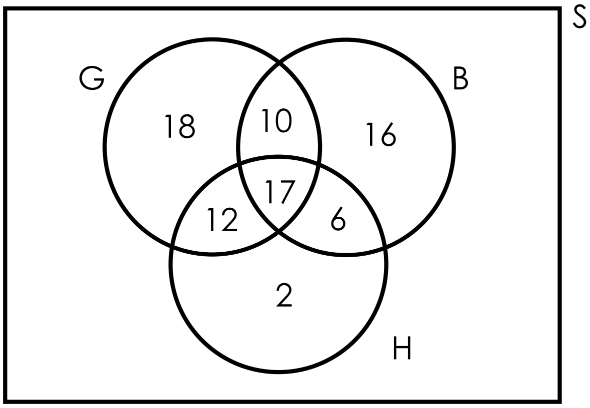
মনে করি,

সকল শিক্ষার্থীর সেট $S$

গোলাপ পছন্দকারী শিক্ষার্থীর সেট $G$

বেলি পছন্দকারী শিক্ষার্থীর সেট $B$

হাসনাহেনা পছন্দকারী শিক্ষার্থীর সেট $H$



(খ) কতজন শিক্ষার্থী ফুল তিনটির কোনটিই পছন্দ করে না? নির্ণয় করো।

প্রশ্নমতে,

$n(S) = 100$

$n(G) = 57$

$n(B) = 49$

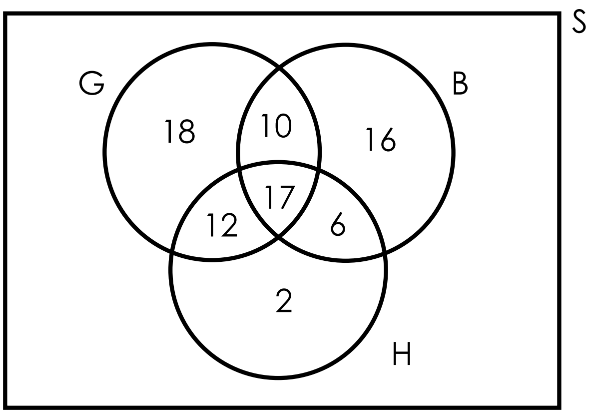
$n(H) = 37$

$n(G \cap B) = 27$

$n(B \cap H) = 23$

$n(H \cap G) = 29$

$n(G \cap B \cap H) = 17$




আমরা জানি,

$n(G \cup B \cup H)$

$= n(G) + n(B) + n(H) - n(G \cap B) - n(B \cap H) - n(H \cap G) + n(G \cap B \cap H)$

$= 57 + 49 + 37 - 27 - 23 - 29 + 17$

$= 81$

$\therefore$ কোনো ফুলই পছন্দ করে না $= n(S) - n(G \cup B \cup H)$

$= 100 - 81$ জন।

$=$ **19 জন।** $(\boldsymbol{Ans})$

**বিকল্পঃ**

'ক' এর ভেনচিত্র হতে পাই,

অন্তত একটি ফুল পছন্দ করে এমন শিক্ষার্থী সংখ্যা $= 18 + 10 + 16 + 12 + 17 + 6 + 2$

$= 81$

$\therefore$ কোনো ফুল পছন্দ করে না এমন শিক্ষার্থী সংখ্যা $= 100 - 81$ জন।

$=$ **19 জন।** $(\boldsymbol{Ans})$

(গ) কতজন শিক্ষার্থী ফুল তিনটির কেবল একটি ফুল পছন্দ করে? নির্ণয় করো।

'ক' এর ভেনচিত্র হতে পাই

কেবল গোলাপ পছন্দ করে $= 18$ জন

কেবল বেলি পছন্দ করে $= 16$ জন

কেবল হাসনাহেনা পছন্দ করে $= 2$ জন

কেবল একটি ফুল পছন্দ করে $= 18 + 16 + 2$ জন

$= \mathbf{36}$ **জন** $(Ans)$

# ত্রিকোণমিতি

$fA = 15\cos^2\alpha + 2\sin\alpha, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$B = 3\sin^2\theta + 5\cos^2\theta$ [ব. বো. '১৯]

(ক) প্রমাণ করো যে, রেডিয়ান কোন একটি ধ্রুব কোন।

(খ) $A = 7$ হলে, $\cot\alpha$ এর মান নির্ণয় করো।

(গ) $B = 4$ হলে, $\theta$ এর মান নির্ণয় করো।

## উত্তর

(ক) প্রমাণ করো যে, রেডিয়ান কোন একটি ধ্রুব কোন।

মনে করি, $O$ কেন্দ্র বিশিষ্ট $ABC$ বৃত্তে $\angle AOB$ একটি রেডিয়ান কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOB$ একটি ধ্রুব কোণ।

**অঙ্কনঃ** $OA$ রেখাংশের (ব্যাসার্ধের) ওপর $OP$ লম্ব আঁকি।

**প্রমানঃ** $OP$ লম্ব বৃত্তের পরিধিকে $P$ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে চাপ, $AP =$ পরিধির এক-চতুর্থাংশ $= \frac{1}{4}2\pi r = \frac{\pi r}{2}$ এবং চাপ $AB =$ ব্যাসার্ধ $r$ **[$\angle AOB =$ রেডিয়ান]**

আমরা জানি, বৃত্তের কোন চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।

$$\frac{\angle AOB}{\angle AOP} = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } AP}$$

$$\therefore \angle AOB = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } AP} \times \angle AOP = \frac{r}{\frac{\pi r}{2}} \times \text{এক সমকোণ}$$ **[$OA$ ব্যাসার্ধ এবং $OP$ এর উপর লম্ব]**

$$= \frac{2}{\pi} \text{ সমকোণ}$$

**যেহেতু সমকোণ ও $\pi$ ধ্রুবক, সেহেতু $\angle AOB$ একটু ধ্রুব কোণ।** (প্রমাণিত)

(খ) $A = 7$ হলে, $\cot\alpha$ এর মান নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $A = 15\cos^2\alpha + 2\sin\alpha, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$A = 7$ হলে, $15\cos^2\alpha + 2\sin\alpha = 7$

বা, $15(1 - \sin^2\alpha) + 2sin\alpha = 7$ $\quad [\because \mathbf{1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha}]$

বা, $15 - 15\sin^2\alpha + 2sin\alpha = 7$

বা, $-15\sin^2\alpha + 2sin\alpha + 15 - 7 = 0$

বা, $15\sin^2\alpha - 2sin\alpha - 8 = 0$

বা, $15\sin^2\alpha - 12sin\alpha + 10sin\alpha - 8 = 0$

বা, $3sin\alpha(5sin\alpha - 4) + 2(5sin\alpha - 4) = 0$

বা, $(3sin\alpha + 2)(5sin\alpha - 4) = 0$

হয়, $3sin\alpha + 2 = 0$

বা, $3sin\alpha = -2$

$\therefore sin\alpha = -\frac{2}{3}$

অথবা, $5sin\alpha - 4 = 0$

বা, $5sin\alpha = 4$

$\therefore sin\alpha = \frac{4}{5}$

যেহেতু, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ অর্থাৎ $\alpha$ এর অবস্থান ২য় চতুর্ভাগে ধনাত্মক হবে।

$\therefore sin\alpha = -\frac{2}{3}$ গ্রহণযোগ্য নয়।

তাহলে $sin\alpha = \frac{4}{5}$ হলে,

$$cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$$

যেহেতু, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ অর্থাৎ $\alpha$ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে এবং $sin$ ও $cosec$ ব্যতীত সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ঋণাত্মক।

$\therefore cos\alpha = -\frac{3}{5}$

এখন, $cot\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$

$$= \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$$

নির্ণেয় মান $-\frac{3}{4}$

(গ) $B = 4$ হলে, $\theta$ এর মান নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $B = 3\sin^2\theta + 5\cos^2\theta$

$B = 4$ হলে, $3\sin^2\theta + 5\cos^2\theta = 4$

বা, $3\sin^2\theta + 5(1 - \sin^2\theta) = 4$ $\quad [\because \mathbf{1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha}]$

বা, $3\sin^2\theta + 5 - 5\sin^2\theta = 4$

বা, $-2\sin^2\theta = 4 - 5 = -1$

বা, $2\sin^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta = \frac{1}{2}$

বা, $sin\theta = \pm\frac{1}{2}$

$\therefore sin\theta = \sqrt{\frac{1}{2}}$ হলে,

প্রথম চতুর্ভাগে, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = sin\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে,

দ্বিতীয় চতুর্ভাগে, $sin\theta = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = sin\frac{3\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}$

আবার, $sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে,

তৃতীয় চতুর্ভাগে, $sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$= -sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = sin\frac{5\pi}{4}$$

$\therefore \theta = \frac{5\pi}{4}$

$sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে,

চতুর্থ চতুর্ভাগে, $sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$= -sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = sin\frac{7\pi}{4}$$

$\therefore\ \theta = \frac{7\pi}{4}$

**নির্ণেয় মান: $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}}$**

$A = 36y^2 - 8y - 5, B = 2a^3 + 3a^2 - 32a + 15$ এবং $C = log_4(14 + \sqrt{x^2 - 12x + 36})$

[ব. বো. '১৯]

(ক) $A = 0$ হলে সমীকরণটির নিশ্চায়ক নির্ণয় করো।

(খ) উৎপাদক উৎপাদের সাহায্যে $B$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

(গ) $C = 2$ হলে, $x$ এর মান নির্ণয় করো।

## উত্তর

(ক) $A = 0$ হলে সমীকরণটির নিশ্চায়ক নির্ণয় করো।

$A = 0$ হলে,

$$36y^2 - 8y - 5 = 0$$

$\therefore$ নিশ্চায়ক $= (-8)^2 - 4.36(-5)$

$= 64 + 720$

$= \mathbf{784}$ $\quad (Ans)$

(খ) উৎপাদক উৎপাদের সাহায্যে $B$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

দেওয়া আছে, $B = 2a^3 + 3a^2 - 32a + 15$

ধরি, $\mathrm{f(a)} = 2a^3 + 3a^2 - 32a + 15$

$\mathrm{f}(-5) = 2(-5)^3 + 3(-5)^2 - 32(-5) + 15 = 0$

$\therefore (a+5), f(a)$ এর একটি উৎপাদক

প্রদত্ত রাশি $= 2a^3 + 3a^2 - 32a + 15$

$= 2a^3 + 10a^2 - 7a^2 - 35a + 3a + 15$

$= 2a^2(a+5) - 7a(a+5) + 3(a+5)$

$= (a+5)(2a^2 - 7a + 3)$

$= (a+5)(2a^2 - 6a - a + 3)$

$= (a+5)\{2a(a-3) - 1(a-3)\}$

$= \boldsymbol{(a+5)(a-3)(2a-1)}$ $(Ans)$

(গ) $C = 2$ হলে, $x$ এর মান নির্ণয় করো।

$C = 2$ হলে, $2 = log_4(14 + \sqrt{x^2 - 12x + 36})$

বা, $4^2 = 14 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}$

বা, $16 - 14 = \sqrt{x^2 - 12x + 36}$

বা, $2 = \sqrt{x^2 - 12x + 36}$

বা, $4 = x^2 - 12x + 36$

বা, $x^2 - 12x + 32 = 0$

বা, $x^2 - 8x - 4x + 32 = 0$

বা, $x(x - 8) - 4(x - 8) = 0$

বা, $(x - 8)(x - 4) = 0$

হয়, $x - 8 = 0$

বা, $x = 8$

অথবা, $x - 4 = 0$

বা, $x = 4$

$\therefore \boldsymbol{x = 4, 8} \quad (\boldsymbol{Ans})$

$f(x) = \frac{3-x}{3+x}$ এবং $P(x) = \left(2x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)^7$

[ বরিশাল বোর্ড – ২০১৯ ]

(ক) $x < \frac{x}{3} + 5$ এর সমাধান সেট নির্ণয় করো।

(খ) $P(x)$ এর বিস্তৃতিতির ৩য় ও ৪র্থ পদের অনুপাত $\frac{4}{15}$ হলে, $x$ এর মান নির্ণয় করো।

(গ) $f^{-1}(x)$ ফাংশনটি এক-এক কিনা নির্ধারণ করো।

## উত্তর

(ক) $x < \frac{x}{3} + 5$ এর সমাধান সেট নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে,

$$x < \frac{x}{3} + 5$$

বা, $3x < x + 15$ [3 দ্বারা গুন করে]

বা, $3x - x < x + 15 - x$

বা, $2x < 15$

**নির্ণেয় সমাধান সেট,** $S = \left\{x : x \in \mathbb{R}, x < \frac{15}{2}\right\}$

(খ) $P(x)$ এর বিস্তৃতিতির ৩য় ও ৪র্থ পদের অনুপাত $\frac{4}{15}$ হলে, $x$ এর মান নির্ণয় করো।

দেওয়া আছে, $P(x) = \left(2x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)^7$

$\therefore \left(2x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)^7 = (2x^2)^7 + \binom{7}{1}(2x^2)^6.\left(\frac{1}{2x^2}\right) + \binom{7}{2}(2x^2)^5.\left(\frac{1}{2x^2}\right)^2 +$

$\binom{7}{3}(2x^2)^4.\left(\frac{1}{2x^2}\right)^3 + \cdots$

$= 128x^{14} + 7 \times 32x^{10} + 21 \times 8x^6 + 35 \times 2x^2 + \cdots$

$= 128x^{14} + 224x^{10} + 168x^6 + 70x^2 + \cdots$

এখানে, তৃতীয় পদ $= 168x^6$

এবং ৪র্থ পদ $= 70x^2$

শর্তমতে, $\frac{168x^6}{70x^2} = \frac{4}{15}$

বা, $\frac{84x^4}{35} = \frac{4}{15}$

বা, $\frac{21x^4}{35} = \frac{1}{15}$

বা, $\frac{21x^4}{7} = \frac{1}{3}$

বা, $63x^4 = 7$

বা, $x^4 = \frac{7}{63} = \frac{1}{9}$

বা, $(x^2)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

বা, $x^2 = \frac{1}{3}$

$\therefore x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

**নির্ণেয় মান** $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

(গ) $f^{-1}(x)$ ফাংশনটি এক-এক কিনা নির্ধারণ করো।

দেওয়া আছে, $f(x)=\frac{3-x}{3+x}$

ধরি, $y=f(x)=\frac{3-x}{3+x}$

$\therefore x=f^{-1}(y)$

আবার, $y=\frac{3-x}{3+x}$

বা, $3y+xy=3-x$

বা, $xy+x=3-3y$

বা, $x(y+1)=3-3y$

বা, $x=\frac{3-3y}{y+1}$

বা, $f^{-1}(y)=\frac{3-3y}{y+1}$

বা, $f^{-1}(x)=\frac{3-3x}{x+1}$

এখন, ধরি $a\in$ ডোম $f^{-1}(x)$ এবং $b\in f^{-1}(x)$

$f^{-1}(x)$ ফাংশনটি এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি $f^{-1}(a)=f^{-1}(b)$ এর জন্য $a=b$ হয়।

এখন, $f^{-1}(a)=f^{-1}(b)$

বা, $\frac{3-3a}{a+1}=\frac{3-3b}{b+1}$

বা, $(3-3a)(b+1)=(a+1)(3-3b)$

বা, $3b-3ab+3-3a=3a-3ab+3-3b$

বা, $-3a-3a=-3b-3b$

বা, $-6a=-6b$

$\therefore a=b$

$\therefore f^{-1}(x)$ ফাংশনটি এক-এক।

# ভেক্টর

$ABCD$ চতুর্ভুজের $AB, BC, CD$ ও $AD$ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $P, Q, R$ ও $S$। $AC$ কর্ণের মধ্যবিন্দু $M$. [ বরিশাল বোর্ড – ২০১৯ ]

(ক) 7 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $PQRS$ একটি সামান্তরিক।

(গ) প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BM} = \underline{0}$

## উত্তর

(ক) 7 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে, গোলকের ব্যাস $= 7$ সে.মি.

$\therefore$ গোলকের ব্যাসার্ধ, $\mathrm{r} = \frac{7}{2} = 3.5$ সে.মি.

$\therefore$ গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল, $= 4\pi r^2$ বর্গ সে.মি.

$= 4 \times 3.1416 \times (3.5)^2$ বর্গ সে.মি.

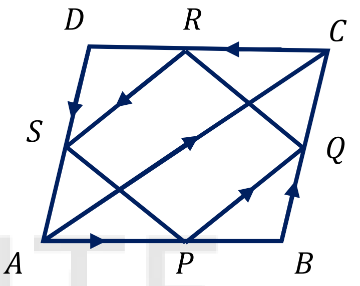
$= \mathbf{153.94}$ **বর্গ সে.মি.** **(প্রায়)**

(খ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $PQRS$ একটি সামান্তরিক।

দেওয়া আছে, $ABCD$ চতুর্ভুজের $AB, BC, CD$ ও $AD$ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $P, Q, R$ ও $S$।

এখন, $P, Q; Q, R; R, S$ ও $S, P$ যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQRS$ একটি সামান্তরিক।




**প্রমাণ :** মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}, \overrightarrow{BC} = \underline{b}, \overrightarrow{CD} = \underline{c}, \overrightarrow{DA} = \underline{d}$

তাহলে, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

$\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

কিন্তু, $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$

$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \underline{0}$

বা, $(\underline{a} + \underline{b}) = -(\underline{c} + \underline{d})$

বা, $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

বা, $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore PQ$ এবং $SR$ সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, $QR$ এবং $PS$ সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore PQRS$ একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

(গ) প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{BM}=\underline{0}$

এখানে, $ABCD$ চতুর্ভুজের $AB$ ও $BC$ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে $P$ ও $Q$ এবং $AC$ কর্ণের মধ্যবিন্দু $M$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{BM}=\underline{0}$

**প্রমাণ :** ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,

$\Delta CAQ$ হতে পাই,

$$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{CQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$\therefore \overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AQ}\ \dots\dots\dots\dots(i)$

$\Delta CAB$ হতে পাই,

$$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$$

বা, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$

বা, $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{CA}$ [$(\boldsymbol{i})$ **হতে** ]

$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AQ}\ \dots\dots\dots\dots(ii)$

$\Delta LMP$ হতে পাই,

$$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CP}$$

বা, $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $[\because \boldsymbol{\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}]$

বা, $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AQ})$ [$(\boldsymbol{ii})$ **হতে** ]

$\therefore \overrightarrow{CP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AQ}\ \dots\dots\dots\dots(iii)$

$\Delta CBM$ হতে পাই,

$$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CM}$$

বা, $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$ $[\because \boldsymbol{\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}}]$

বা, $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-(2\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AQ})$ [$(\boldsymbol{i})$ **হতে** ]

$\therefore \overrightarrow{BM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{AQ}\ \dots\dots\dots\dots(iv)$

এখন, বামপক্ষ $= \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BM}$

$$= \overrightarrow{AQ} + (\frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AQ}) + (-\frac{3}{2}\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AQ})$$

$$= 2\overrightarrow{AQ} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AQ} = \underline{0}$$

$=$ **ডানপক্ষ**

$\therefore \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BM} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

# সম্ভাবনা

দুটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপ করা হলো। [ব. বো. '১৯]

(ক) ঘটনাটির Probability tree আঁক।

(খ) নমুনাক্ষেত্রের প্রতিটি নমুনা বিন্দুর অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি কমপক্ষে 9 হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

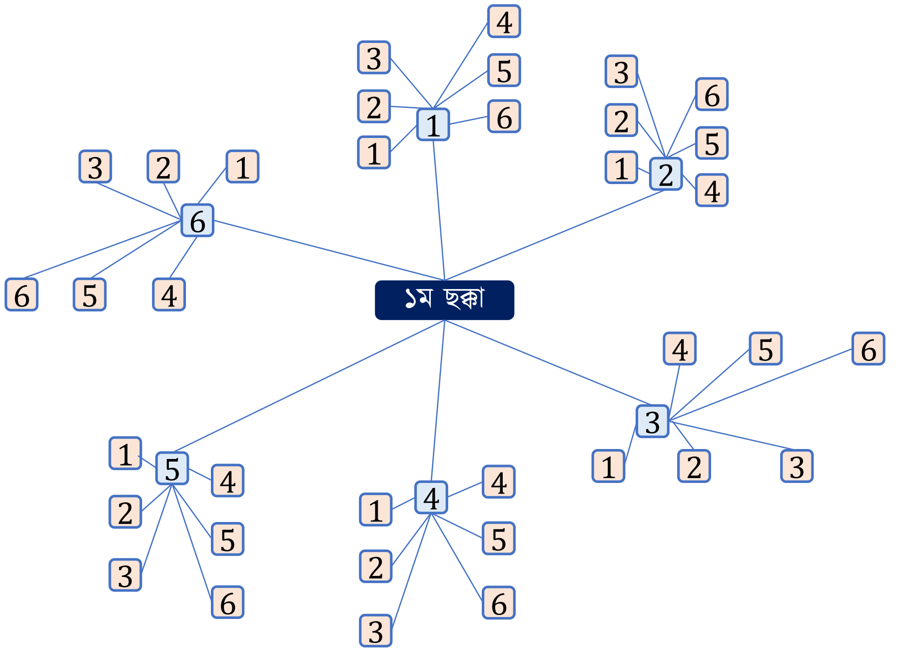
(গ) নমুনাক্ষেত্রের প্রতিটি নমুনা বিন্দুর অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 6 অথবা 11 না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর ।

## উত্তর



(ক) ঘটনাটির Probability tree আঁক।

দুটি ছক্কা একসাথে একবার নিক্ষেপ করে সম্ভাব্য ঘটনার Probability tree নিচে দেওয়া হলো :



(খ) নমুনাক্ষেত্রের প্রতিটি নমুনা বিন্দুর অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি কমপক্ষে 9 হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

'ক' এর Probability tree এর সাহায্যে নমুনাক্ষেত্রটি হলো :

$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,1),(2,2,),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),$ $(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),$ $(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

এখানে, মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা $= 36$ টি।

নমুনা বিন্দুর অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি কমপক্ষে 9 হওয়ার অনুকূল ফলাফল $= 10$ টি। যথা : $(3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3),(6,4), (6,5), (6,6)$

$\therefore$ নমুনা বিন্দুর অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি কমপক্ষে 9 হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{10}{36}$

$= \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{18}}$

(গ) নমুনাক্ষেত্রের প্রতিটি নমুনা বিন্দুর অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 6 অথবা 11 না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর ।

'ক' এর Probability tree এর সাহায্যে নমুনাক্ষেত্রটি হলো :

$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,1),(2,2,),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),$
$(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),$
$(6,2),(6,3),(6,4),(6,5), (6,6)\}$

এখানে, মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা $= 36$ টি।

নমুনা বিন্দুর অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি সমষ্টি 6 অথবা 11 না হওয়ার অনুকূল ফলাফল $= 29$ টি। যথা :$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,1),(2,2,),(2,3),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1), (4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5), (6,1),(6,2),(6,2),(6,3),(6,4), (6,6)$

**∴ নমুনা বিন্দুর অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 6 অথবা 11 না হওয়ার সম্ভাবনা** $= \frac{29}{36}$